UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Sobre un teorema de reordenamiento de series de Lévy-Steinitz

Autor/es

ALEJANDRO MAHÍLLO CAZORLA

Director/es

MANUEL BELLO HERNÁNDEZ

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

Grado en Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2018-19

publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Facultad de Ciencia y Tecnología

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Sobre un teorema de reordenamiento de series de Lévy-Steinitz

Realizado por:

Alejandro Mahillo Cazorla

Tutelado por:

Manuel Bello Hernández

Logroño, junio de 2019

Resumen/Abstract

Resumen

En este trabajo fin de grado haremos un recorrido sobre varios resultados que involucran reordenar los términos de una serie, tanto series en $\mathbb{R}$, cómo series en otros espacios como $\mathbb{R}^n$ o en espacios de Banach, además de un resultado adicional sobre reordenamiento de integrales.

Primero se estudia el caso de las series de números reales, donde demostramos el teorema de reordenamiento de Riemann junto con otros resultados. Continuaremos con la famosa serie de Eisenstein, definida en los complejos, con la propiedad de que al reordenar los términos obtenemos un cambio en el valor de la suma muy elegante.

Pero en lo que a nosotros concierne, el resultado fundamental es el siguiente, el teorema de Lévy-Steinitz, un resultado análogo al de Riemann para series de vectores en $\mathbb{R}^n$.

Por último, terminamos con un resultado de reordenamiento de integrales donde, dependiendo de las sucesiones de conjuntos sobre los que integremos, obtenemos valores distintos.

Abstract

This final degree project will take you through several results about rearranging the terms of series; from series of real numbers to series in $\mathbb{R}^n$; even results about series in Banach spaces and rearranging integrals will be in it.

First, we study the real numbers series case, in which we demonstrate the Riemann rearrangement theorem together with other results. We will continue with the famous Eisenstein serie defined in the complex field. This series has the property that rearrangement in the order of summations results in a predictable change in the value of the series.

As far as we are concerned, the fundamental result is the following, the Lévy-Steinitz theorem, an analogous result of Riemman's theorem for vector series in $\mathbb{R}^n$.

Finally, we end with a result about the rearrangement of integrals, where, in function of the sets that we integrate in the values of the integral are different.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Hoy, es mi primer día de escuela, la verdad, es que estoy nervioso, además a primera hora tengo matemáticas, ¡mi asignatura preferida! Tengo muchas ganas de llegar y que me empiecen a contar cosas nuevas y aprender mucho. Me toca entrar ya a clase, en cuanto salga os cuento todo lo que he aprendido.

Se me ha pasado el tiempo volando, que bien me lo he pasado, así que os voy a contar lo que más me ha gustado. La profesora es "super" maja y sabe muchísimas cosas, además lo que más le gustan son las mates, ¡cómo a mí! Nos ha enseñado un montón de cosas, como unas leyes o propiedades, que aunque ha dicho que no importa mucho que nos quedemos con el nombre, yo me he fijado en el libro y estaban. Teníamos la propiedad asociativa, distributiva y... cuál era esta otra... ah sí, la conmutativa. Es verdad, que esta última decía que $a + b$=$b + a$ y que también servía si en vez de un + teníamos un $-$, como que $a - b = -b + a$. Y nos explicaba la "profe" que claro, si me dan 10 euros y me quitan 2, es lo mismo que quitarme 2 y darme 10, al final acabo con 8 euros. ¡Qué fácil son las mates!

Y sí, eso era lo que pensaba yo hace 15 años, pero la verdad es que las cosas no son tan fáciles como aparentaban entonces. Ahora, cuando se trata de sumar infinitas cantidades descubro que la propiedad conmutativa ya no funciona en ciertos casos, pero a cambio, recibimos resultados asombrosos como el **teorema de Riemann** o el **teorema de Lévy-Steinitz**. Ambos, uno en $\mathbb{R}$ y otro en $\mathbb{R}^n$ respectivamente, nos hablan sobre como cierto tipo de series pueden ser reordenadas para obtener muchos valores distintos. Otros resultados que encontraremos en este trabajo tienen que ver con números complejos y con integrales y veremos cómo les afectan sus particulares reordenamientos.

Espero que leyendo este trabajo disfrutes tanto como yo he disfrutado redactándolo. Y aunque haya cosas que cambien, como pasa con el valor de las series esas "raritas" de las que hablábamos antes; hay otras que se mantienen intactas, como mi pasión por las matemáticas. Y ahora sí, comenzamos.

Capítulo 2

Teorema de reordenamiento de Riemann

Lo primero de todo será recordar algunos conceptos sobre series y convergencia en un espacio normado, daremos una definición más general que nos servirá a la largo de esta memoria.

Definición 1 *Una sucesión en un espacio normado es una función real con dominio en* $\mathbb{N}$ *y codominio en un espacio normado* X*, o sea,* $s\colon \mathbb{N} \to X$*. Denotaremos una sucesión indistintamente de las siguientes maneras* (a_n), $(a_n)_{n\geq 1}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *o* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$*. Diremos que una sucesión es convergente a un valor* $l \in X$ *cuando,*

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n - l\| = 0.$$

Por último, si consideramos ahora la aplicación $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *estrictamente creciente, diremos que la sucesión* $(a_{\varphi(n)})$ *es una subsucesión de* (a_n)*.*

Definición 2 *Sea una sucesión* (a_n) *en un espacio normado* X *. La serie generada por* (a_n) *y denotada como* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es el límite de la sucesión de sus sumas parciales* (S_N)*, es decir,*

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Si la sucesión (S_N) *converge; es decir, si existe el anterior límite y vale* S*, entonces diremos que la serie es convergente y su valor es* S*. Si la sucesión* (S_n) *no converge, diremos que es divergente.*

Definición 3 *Diremos que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es absolutamente convergente si* $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ *converge.*

Notemos que si una serie es absolutamente convergente en un espacio de Banach entonces es convergente, ya que los términos de la sucesión (a_n), son menores o iguales que los de la sucesión $(\|a_n\|)$. Pero notemos también que podría suceder que una serie convergiese, pero que no fuese absolutamente convergente. Estos casos son los que nos interesan y es donde tendrá vital importancia el orden en la que se sume, es decir, el reordenamiento que se escoja.

Definición 4 *Dada una biyección cualquiera de los naturales $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, diremos que la sucesión $(a_{\sigma(n)})$ es un reordenamiento de (a_n). Análogamente, podemos hablar de una serie y de su reordenamiento.*

Hemos visto definiciones sobre espacios normados, pero para este primer capítulo consideraremos que $(X, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Con todos estos ingredientes ya somos capaces de entender un poco mejor el desarrollo de esta historia.

2.1. Inicios de la teoría de reordenamiento de series

En 1833 Cauchy observó que una serie convergente de números reales cuyos términos no son todos positivos podía contener una subserie divergente; entendiendo como subserie la serie de una subsucesión de la primera. Después, en 1837 Dirichlet presentó las siguientes series

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \cdots \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \cdots,$$

donde el primer caso es la serie armónica alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ y la segunda contiene los mismos términos, pero primero se suman 2 positivos y luego se resta uno negativo, es decir, la segunda es un reordenamiento de la primera. Además, el valor al que convergen ambas series es distinto, el valor de la primera serie es $\log(2)$, mientras que el valor de la segunda es $\frac{3}{2}\log(2)$. Pero, ¿cómo podemos calcular el valor de ambas series? Para calcular la primera serie presentamos 2 soluciones diferentes a la comúnmente utilizada que hace uso del desarrollo de MacLaurin de $\log(1 + x)$.

- **Primera solución.** Usaremos la siguiente identidad

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

  Notemos ahora que la parte de la derecha la podemos escribir como

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right),$$

  que es la suma de Riemann de la integral $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$. Calculando el valor de esa integral obtenemos el resultado buscado.

- **Segunda solución.** Usaremos que el $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\log(n) = \gamma$. Donde γ es la constante de Euler-Mascheroni.

  Entonces,

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n} = \left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2n}\right] - \left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right]$$
$$= \left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2n}\right] - \log(2n) - \left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right] + \log(n) + \log(2).$$

  Tomando límites, obtenemos que el valor de la serie armónica alternada es $\gamma-\gamma+\log(2) = \log(2)$.

Para la segunda serie calcularemos sus sumas parciales para después obtener su límite tal y como lo hacía Apostol [1] en su libro. Podemos encontrar otras soluciones en [3].

Denotaremos como S_n la suma parcial con n términos. Si n es múltiplo de 3, es decir, $n = 3m$, entonces la suma parcial S_{3m} tiene $2m$ valores positivos y m negativos y viene dada por la siguiente expresión,

$$S_{3m} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k} = \left(\sum_{k=1}^{4m} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{2k}\right) - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k}$$

En cada una de las 3 últimas sumas utilizamos la siguiente relación

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = \log(m) + \gamma + o(1) \text{ cuando } n \to \infty,$$

para obtener

$$S_{3m} = (\log(4m) + \gamma + o(1)) - \frac{1}{2}(\log(2m) + \gamma + o(1)) - \frac{1}{2}(\log(m) + \gamma + o(1))$$
$$= \frac{3}{2}\log(2) + o(1).$$

Así, $\lim_{m\to\infty} S_{3m} = \frac{3}{2}\log(2)$. Como además $S_{3m+1} = S_{3m} + \frac{1}{4m+1}$ y $S_{3m-1} = S_{3m} - \frac{1}{2m}$, tenemos que S_{3m+1} y S_{3m-1} tienen el mismo límite que S_{3m} cuando $m \to \infty$. Por tanto, concluimos así que el valor de nuestra serie es $\frac{3}{2}\log(2)$.

Dirichlet además probó que si una serie es absolutamente convergente, entonces cualquier reordenamiento de esta nos da el mismo valor; este resultado lo probaremos más adelante en este capítulo.

En 1854 Riemann escribe que, esencialmente, hay 2 tipos de series infinitas: las que son absolutamente convergentes y las que no. Añade que las series absolutamente convergentes se pueden reordenar libremente sin modificar el valor de la suma, mientras que el valor de las otras series depende del orden en el que se sumen sus términos. Riemann entonces prueba su teorema de reordenamiento que dice que si una serie converge, pero no de forma absoluta, entonces esta puede converger a cualquier número real r si se reordenan los términos correctamente.

2.2. Teorema de Riemann y otros resultados sobre convergencia de series

A lo largo de esta sección enunciaremos y probaremos algunos de los resultados mencionados en la sección anterior sobre series de números reales. No incluiré todas las demostraciones ya que muchas de ellas son clásicas y además este trabajo está más enfocado al caso en que la dimensión del espacio normado sea mayor o igual que 2. Aun así, las demostraciones de estos teoremas las podemos encontrar en [1] y [9].

Teorema 2.2.1 *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números reales absolutamente convergente, y sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ un reordenamiento de la primera, entonces, la segunda serie es absolutamente convergente y ambas series tienen el mismo valor.*

Demostración:
Haremos un pequeño resumen de la prueba por si el lector se anima a intentarla antes de buscarla en la bibliografía. La idea será cancelar los primeros términos para quedarnos solo con la cola de la serie, la cual sabemos que es pequeña [1]. □

Para conseguir nuestro propósito de demostrar el teorema de Riemann y otros resultados sobre convergencia absoluta [9] debemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 2.2.2 *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números reales convergente y denotemos como (p_n) a los términos de (a_n) que son mayores o iguales que cero en el orden en el que aparecen en la sucesión, es decir, p_1 es el primer término positivo de (a_n), p_2 el segundo, etc. De la mismo forma denotamos como $(-q_n)$ los términos de (a_n) que son menores que cero. Por tanto:*

1. *Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no es absolutamente convergente, entonces las series $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ divergen.*
2. *Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ convergen y además*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n + \sum_{n=1}^{\infty} q_n. \tag{2.1}$$

Demostración:
Podemos encontrar una demostración de este resultado en [1]. □

Teorema 2.2.3 *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números reales convergente, pero que no es absolutamente convergente, entonces existen reordenamientos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ que divergen.*

Demostración:
La idea de esta prueba será aplicar el resultado visto anteriormente y buscar que las sumas parciales de la serie reordenada sean cada vez más grandes. Para más información podemos consultar la demostración que aparece en [9]. □

Por último, antes de probar el teorema de Riemann vamos a dar una caracterización de las series reales absolutamente convergentes.

Teorema 2.2.4 *Una serie convergente de números reales se mantiene convergente para cada reordenamiento si y solo si la serie converge absolutamente.*

Demostración:
La idea de esta demostración será aplicar los teoremas 2.2.1 y 2.2.3, uno en cada implicación [9]. □

Teorema 2.2.5 (Teorema de reordenamiento de Riemann) *Sea una serie de números reales convergente, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pero no absolutamente convergente y sea r un número real cualquiera. Entonces, existe un reordenamiento $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que converge al valor r.*

Demostración:
La idea de esta demostración es muy parecida a la vista para el teorema 2.2.3, solo que en este caso en vez de buscar que las sumas parciales se hagan grandes, buscamos controlarlas y que se mantengan próximas a r [1]. □

En el análisis clásico, al estudiar series de números reales que no convergen absolutamente se han obtenido resultados sobre reordenamientos y de calcular el valor de la suma de una serie reordenada en función de la serie inicial. Los más importantes se deben a Pringsheim, una referencia moderna, aunque de difícil lectura, es [16].

Capítulo 3

Reordenamientos de la serie de Eisenstein G_2

Por lo general, cuando buscamos ejemplos para ver el efecto del reordenamiento en series que no son absolutamente convergentes, parecen como casos muy concretos, los cuáles no nos encontraríamos en la práctica matemática. Esto hace que nos preguntemos si este fenómeno es algo que debamos tener en cuenta o son casos muy particulares en los que podemos encontrar estos problemas. Por eso, vamos a ver un ejemplo que aparece en el estudio de formas modulares, se trata de la serie de Eisenstein G_2. La función G_2 es la función holomorfa en el semiplano superior $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ definida de la siguiente forma:

$$G_2(\tau) := \sum_m \left[\sum_n \frac{1}{(n + m\tau)^2} \right], \tag{3.1}$$

sumando en el orden que aparece con $(m, n) \in \mathbb{Z}$, excepto para $(m, n) = (0, 0)$ donde el sumando no está definido. Esta serie se debe entender de la siguiente forma,

$$G_2(\tau) := 2\zeta(2) + \lim_{M\to\infty} \lim_{N\to\infty} \sum_{0 \ <|m|\leq M} \sum_{|n|\leq N} \frac{1}{(n + m\tau)^2}. \tag{3.2}$$

Notemos que (3.1) no converge absolutamente. Para ello debemos probar que

$$\sum_m \left[\sum_n \frac{1}{|n + m\tau|^2} \right] = \infty. \tag{3.3}$$

Sea $\tau = s + ti$ con $t > 0$ y $s \in \mathbb{R}$, ahora, la idea principal de esta prueba es comparar la serie con una integral que sea más pequeña salvo una constante y luego ver que esa integral diverge. Ahora bien, tenemos que,

$$\begin{aligned} \sum_m \left[\sum_n \frac{1}{|n + m\tau|^2} \right] &= \sum_m \left[\sum_n \frac{1}{(n + ms)^2 + (mt)^2} \right] \\ &\geq \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + ms)^2 + (mt)^2} \right]. \end{aligned}$$

Por tanto, si probamos que esta última serie diverge ya estaría probado. Como hemos dicho, nuestra idea es compararla con una integral, la que parece que tiene más sentido considerar es la siguiente: $\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{1}{(x+ys)^2+(yt)^2}\, dx\, dy$. Veamos que relación tienen la serie y la integral,

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{1}{(x+ys)^2+(yt)^2}\, dx\, dy = \int_1^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{(x+ys)^2+(yt)^2}\, dx\, dy$$

Ahora, nos gustaría acotar la integral sustituyendo en el intervalo inferior para así obtener una serie parecida a la que buscamos. El problema es que nuestra función $f(x,y) = \frac{1}{(x+ys)^2+(yt)^2}$, como función de x, no es estrictamente monótona, derivando respecto a x observamos que el crecimiento de la función depende del valor de $(x+ys)$. Si $(x+ys) > 0$, la función crece y en caso contrario decrece. Notemos que este caso solo es posible si $s < 0$. Por lo tanto, supondremos para este caso que $s < 0$, si fuese positivo, el estudio es mucho más simple. Podemos ver un ejemplo de esta función en la figura 3.1.

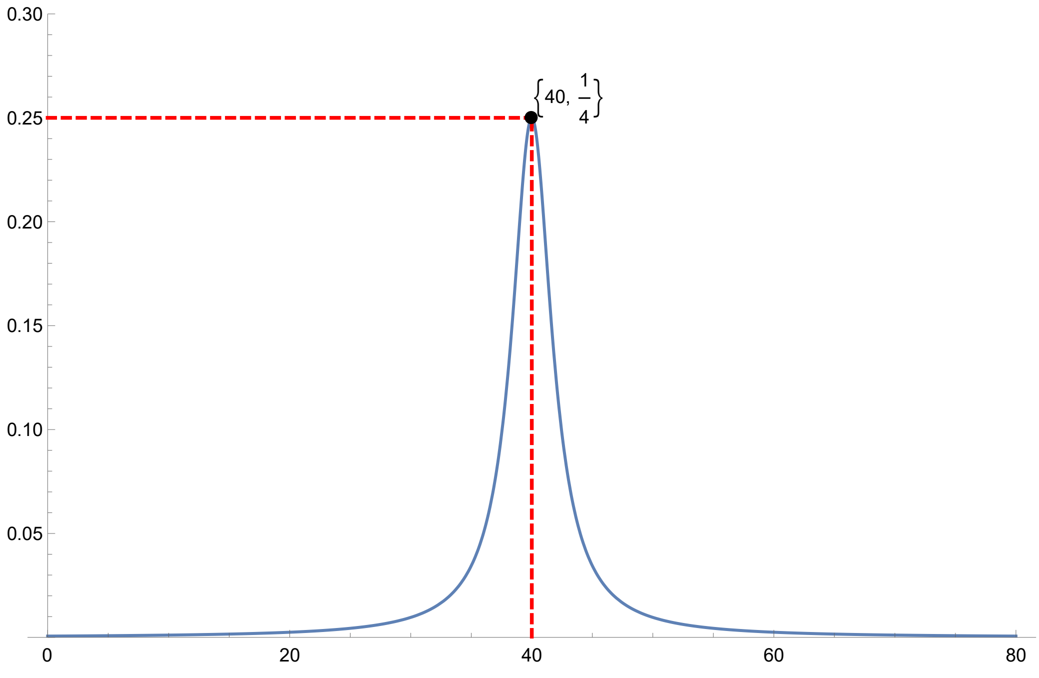

Figura 3.1: Gráfica de la función $f(x,y)$ con $y = 1$, $s = -40$, $t = 2$.

Para acotar la integral como queremos, debemos separar la función en 3 partes: un intervalo donde la función crece, otro intervalo de longitud uno donde encontraremos el máximo de la función y otro intervalo donde la función decrece. Para ello definimos primero $n_{y,s} := \lfloor -ys \rfloor$, ya que en este valor se anula la derivada y es donde se alcanza el máximo y procedemos a separar la integral.

$$\begin{aligned}
&\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{1}{(x+ys)^2+(yt)^2}\,dx\,dy = \int_1^\infty \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \frac{1}{(x+ys)^2+(yt)^2}\,dx\,dy \\
&= \int_1^\infty \left[\sum_{n=2}^{n_{y,s}} \int_{n-1}^{n} f(x,y)dx + \int_{n_{y,s}}^{n_{y,s}+1} f(x,y)dx + \sum_{n=n_{y,s}+1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x,y)dx \right] dy \\
&\leq \int_1^\infty \left[\sum_{n=2}^{n_{y,s}} f(n,y) + f(-ys,y) + \sum_{n=n_{y,s}+1}^{\infty} f(n,y) \right] dy \\
&= \int_1^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{dy}{(n+ys)^2+(yt)^2} + \int_1^\infty \frac{dy}{(yt)^2} - \int_1^\infty \frac{dy}{(1+ys)^2+(yt)^2}. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Notemos que ya tenemos algo semejante a lo que buscamos, aunque nos han aparecido 2 términos extras, no es muy difícil de probar que esos 2 términos están acotados.

$$0 \leq \int_1^\infty \frac{dy}{(yt)^2} - \int_1^\infty \frac{dy}{(1+ys)^2+(yt)^2} \leq \int_1^\infty \frac{dy}{(yt)^2} = \frac{1}{t^2}.$$

Donde en la primera desigualdad he utilizado que $\frac{1}{(yt)^2} \geq \frac{1}{(1+ys)^2+(yt)^2}$ y en la segunda he utilizado que la integral de una función positiva es mayor o igual que 0. De esta forma, si probamos que la suma de esas 3 integrales diverge, entonces forzosamente sabremos que es por culpa de la primera.

Por consiguiente, nos preocuparemos sólo de trabajar con el primer término de (3.4). Notemos que la función $f_n(y) = \frac{1}{(n+ys)^2+(yt)^2}$ para un s fijo, al igual que antes, depende del valor de n para poder estudiar su monotonía. Actuamos como antes y lo separamos en 3 partes y definimos $m_{n,s} \in \mathbb{R}$ tal que sea $y_m \in (1,\infty)$ con $f_n'(y_m) = 0$, entonces $m_{n,s} := \lfloor y_m \rfloor$.

$$\begin{aligned}
&\int_1^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{dy}{(n+ys)^2+(yt)^2} = \sum_{n=1}^\infty \int_1^\infty \frac{dy}{(n+ys)^2+(yt)^2} \\
&= \sum_{n=1}^\infty \left[\sum_{m=2}^{m_{n,s}} \int_{m-1}^{m} f_n(y)\,dy + \int_{m_{n,s}}^{m_{n,s}+1} f_n(y)\,dy + \sum_{m=m_{n,s}+1}^{\infty} \int_m^{m+1} f_n(y)\,dy \right] \\
&\leq \sum_{n=1}^\infty \left[\sum_{m=2}^{m_{n,s}} f_n(m) + f_n(M) + \sum_{m=m_{n,s}+1}^{\infty} f_n(m) \right] \\
&= \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+ms)^2+(mt)^2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+Ms)^2+(Mt)^2} - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+s)^2+t^2}.
\end{aligned}$$

Donde en la primera igualdad hemos utilizado el teorema de convergencia monótona y $M \in [m_{n,s}, m_{n,s}+1]$ es tal que $f_n(M) = \text{máx}\{f_n(y) | y \in (1,\infty)\}$. Notemos que aparece nuestro doble sumatorio acompañado de dos sumas, que no es muy difícil de comprobar que son finitas al compararlas con una integral, análogo a lo que estamos realizando en esta prueba. A continuación, procedemos a comprobar la divergencia de la integral doble y dar por finalizada la prueba. Tenemos,

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{1}{(x+ys)^2+(yt)^2}\,dx\,dy,$$

para ver que diverge, haremos el cambio de variable $x+ys=u$ y $yt=v$ quedándonos la integral de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}\int_t^\infty \int_{\frac{sv+t}{t}}^\infty \frac{1}{u^2+v^2}\frac{1}{t}\,du\,dv &= \frac{1}{t}\int_t^\infty \frac{1}{v}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{s}{t}+\frac{1}{v}\right)\right]\,dv \\ &\geq \frac{1}{t}\int_t^\infty \frac{1}{v}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{s+1}{t}\right)\right]\,dv.\end{aligned}$$

Donde la última integral diverge y por tanto podemos dar por finalizada la prueba. □

Otra propiedad sorprendente de esta serie doble es que cambiar el orden de sumación da lugar al siguiente resultado.

Lema 3.0.1 *Se cumple que,*

$$\sum_n \left[\sum_m \frac{1}{(n+m\tau)^2}\right] = \sum_m \left[\sum_n \frac{1}{(n+m\tau)^2}\right] - \frac{2\pi i}{\tau}, \tag{3.5}$$

donde en ambas series se excluye el término $(m,n)=(0,0)$.

Esto es, el cambio en el orden de sumación da lugar a un cambio en el valor de la serie dado por el "término residual" $-\frac{2\pi i}{\tau}$.

Demostración:

Primero recordemos como están definidos los dobles sumatorios que aparecen en (3.5),

$$\sum_n \sum_m \frac{1}{(n+m\tau)^2} := 2\frac{\zeta(2)}{\tau^2} + \lim_{N\to\infty}\lim_{M\to\infty} \sum_{0<|n|\leq N}\sum_{|m|\leq M} \frac{1}{(n+m\tau)^2}.$$

De esta forma no tenemos el problema de especificar constantemente que el caso $(n,m)=(0,0)$ no aparece en el doble sumatorio. De forma análoga procedemos con $\sum_m\sum_n \frac{1}{(n+m\tau)^2}$. Para probar la relación (3.5) expresaremos las sumas dadas en términos del desarrollo de Fourier de $\frac{1}{\sin^2(\pi\tau)}$ y en términos de fracciones simples asociadas al desarrollo de la función cotangente. Con esta idea, definimos la siguiente función,

$$\varphi(z) := \frac{1}{z} + \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z+m\tau+n} - \frac{1}{m\tau+n} + \frac{z}{(m\tau+n)^2}\right) \tag{3.6}$$

$$= \frac{z\pi^2}{3} + \pi\cot(\pi z) + \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ m\neq 0}} \left(\pi\cot(\pi(m\tau+z)) - \pi\cot(\pi m\tau) + \frac{\pi^2 z}{\sin^2(\pi m\tau)}\right), \tag{3.7}$$

donde recordemos que $\tau\in\mathbb{H}$ y $z\in\mathbb{C}\backslash\Lambda$, con $\Lambda := \mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$.

Notemos que en la segunda igualdad hemos usado los desarrollos en fracciones simples siguientes, el que involucra al seno [2],

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi u} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(u+k)^2} \tag{3.8}$$

y de la cotangente [5],

$$\pi \cot(\pi u) = \frac{1}{u} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \left(\frac{1}{u+k} - \frac{1}{k} \right).$$

Ahora, como la función cotangente es una función impar, de periodo π, tenemos que,

$$\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ m\neq 0}} \cot(\pi m\tau) := \lim_{n\to\infty} \sum_{0<|m|\leq n} \cot(\pi m\tau) = 0,$$

$$\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ m\neq 0}} \pi \cot(\pi(m\tau + \frac{1}{2})) = \lim_{n\to\infty} \sum_{0<|m|\leq n} \pi \cot(\pi(m\tau + \frac{1}{2})) = 0,$$

evaluando (3.7) en $z = 1/2$ nos queda,

$$\varphi_1(\tau) := \frac{i}{2\pi}\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi i}{12} + \frac{\pi i}{2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sin^2(\pi m\tau)}. \tag{3.9}$$

Si evaluamos (3.7) en $z = \frac{\tau}{2}$ y utilizamos que

$$\lim_{m\to\infty} \left(\frac{i}{2} \cot\left(\pi\left(m + \frac{1}{2}\right)\tau\right)\right) = \frac{1}{2},$$

porque $\tau \in \mathbb{H}$, entonces obtenemos que,

$$\varphi_2(\tau) := \frac{i}{2\pi}\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right) = \tau\varphi_1(\tau) + \frac{1}{2}. \tag{3.10}$$

De la expresión (3.6) nos queda

$$\frac{1}{\tau}\varphi_1\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \varphi_2(\tau)$$

y de la relación (3.10), llegamos a

$$\frac{1}{\tau^2}\varphi_1\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \varphi_1(\tau) + \frac{1}{2\tau}. \tag{3.11}$$

Si ahora en la expresión (3.8) sustituimos τ por $n\tau$, $n \in \mathbb{N}$ y sumamos en n, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n\tau + k)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi n\tau)}.$$

Notemos que esta serie es absolutamente convergente. Primero aplicamos el desarrollo de Fourier de $\frac{1}{\sin^2(\pi\tau)} = -4\sum_{k=1}^{\infty} ke^{2\pi k i\tau}$ y obtenemos lo siguiente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi n\tau)} = (2\pi i)^2 \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} ke^{2\pi nki\tau}.$$

A continuación consideramos $|w| < 1$, $w \in \mathbb{C}$ y vemos que,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} k w^{kn}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} w^{kn}\right)\right)'_w = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{w^n}{n(1-w^n)}\right)\right)'_w.$$

En efecto, como $\frac{|q|^n}{(1-|q|^n)} < \frac{|r|^n}{(1-r)}$ si $|q| < r < 1$ y $\left|e^{2\pi i\tau}\right| < 1$ con $\tau \in \mathbb{H}$. En consecuencia,

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n\tau+k)^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi n\tau)},$$

$$-\frac{\pi^2}{3} + \sum_n\sum_m \frac{1}{(n\tau+k)^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi n\tau)}.$$

Sustituyendo esto en la expresión de $\varphi_1(\tau)$, nos queda

$$\varphi_1(\tau) + \frac{1}{2\tau} = \frac{1}{4\pi}\sum_n\sum_k \frac{1}{(n\tau+k)^2} + \frac{1}{2\tau}. \tag{3.12}$$

Por otra parte,

$$\frac{1}{\tau^2}\varphi_1\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{\tau^2}\left(\frac{\pi i}{12} + \frac{\pi i}{2\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sin^2(\frac{\pi m}{\tau})}\right)$$

de donde obtenemos que

$$\frac{1}{\tau^2}\varphi_1\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{i}{4\pi}\sum_n\sum_k \frac{1}{(n+k\tau)^2}. \tag{3.13}$$

Combinando (3.11) con (3.12) y (3.13) se sigue inmediatamente el resultado del lema. □

La identidad (3.5) aparece de forma natural cuando uno considera la serie de Eisenstein bajo la transformación $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$. En particular, una propiedad clave de G_2 es que cumple la llamada identidad quasimodular

$$\tau^{-2}G_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = G_2(\tau) - \frac{2\pi i}{\tau}, \tag{3.14}$$

De hecho, evaluando G_2 en $-\frac{1}{\tau}$ y manipulando el sumatorio vemos que,

$$\tau^{-2}G_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sum_n\left[\sum_m \frac{1}{(n+m\tau)^2}\right],$$

por lo que la identidad (3.14) es el lema 3.0.1.

Si nos fijamos en como hemos definido el sumatorio doble en (3.2), es como si estuviésemos evaluando los términos en los pares (m, n) contenidos en un rectángulo centrado en el 0 y de lados M y N. ¿Podríamos sumar pensando en los pares contenidos dentro de un círculo? ¿Y dentro de cualquier figura? Nuestra meta en este capítulo será ver que el término residual, es decir, el término $\frac{2\pi i}{\tau}$ se puede describir cuando se suman los términos en G_2 en un orden establecido.

3.1. Teorema de la función residual $E(K,\tau)$

Denotaremos $\mathcal{K}$ la clase de conjuntos compactos $K \subset \mathbb{R}^2$ que son convexos, con interior distinto del vacío y simétricos respecto a x e y. Comenzamos dando varias definiciones clave.

Definición 5 *Para cada $K \in \mathcal{K}$, definimos h_K como la función real cuya gráfica es el contorno superior del conjunto K. En particular definimos h_K de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned} h_K \colon [-A, A] &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \max\{y \in \mathbb{R} \colon (x,y) \in K\}, \end{aligned}$$

donde $A = \max\{x \in \mathbb{R} \colon \exists y \in \mathbb{R} \text{ tq.}(x,y) \in K\}$. Notemos además que h_K es de soporte compacto en $[-A, A]$; es par, por ser K simétrico respecto al eje y y su reflexión $-h_K$ es el contorno inferior de K, ya que K es simétrico respecto al eje x.

Definición 6 *Dado un conjunto $K \in \mathcal{K}$ y una sucesión $(a_{m,n})_{m,n\in\mathbb{Z}}$ de números complejos, definimos*

$$\sum_K a_{m,n} := \lim_{\lambda\to\infty} \sum_{(m,n)\in((\lambda K)\cap\mathbb{Z}^2)} a_{m,n}, \tag{3.15}$$

si ese límite existe. Nos referimos a este valor como la $K-$suma de la serie $\sum a_{m,n}$.

En la siguiente definición utilizaremos este concepto de una forma que nos permita generalizar la definición de la serie de Eisenstein G_2.

Definición 7 . *Si $K \in \mathcal{K}$, denotamos por $G_2(K,\tau)$ la **K-suma de la serie de Eisenstein de orden 2**, es decir,*

$$G_2(K,\tau) := \sum_K \frac{1}{(m\tau+n)^2}, \quad \tau \in \mathbb{H}, \tag{3.16}$$

asumiendo que el valor de la serie exista y por convenio tomando $a_{(0,0)} = 0$ en (3.15), para permitir que el término $a_{(0,0)}$ esté bien definido; ya que el sumando $\frac{1}{(m\tau+n)^2}$ no está definido en $m = n = 0$.

Definición 8 *Si $K \in \mathcal{K}$ y $G_2(K,\tau)$ está definida, denotamos por $E(K,\tau)$ la **función residual asociada a K**, o sea,*

$$E(K,\tau) := G_2(K,\tau) - G_2(\tau).$$

Pasamos ahora, al teorema central de esta sección.

Teorema 3.1.1 *Para todo $\tau \in \mathbb{H}$ y todos los $K \in \mathcal{K}$ se tiene que $G_2(K,\tau)$ existe. Además, la función residual $E(K,\tau)$ viene dada por al expresión*

$$E(K,\tau) = 4\int_0^A \frac{h_K(x)}{\tau^2 x^2 - h_K^2(x)}\, dx, \tag{3.17}$$

donde, como antes, A denota el número para el cuál h_K está soportado en $[-A, A]$.

Ejemplo para motivar: rectángulos. Para motivar este resultado, consideremos el caso más sencillo, es decir, cuando K es el rectángulo $[-c, c] \times [-1, 1]$ con $c > 0$. En este caso h_K es la función indicadora $h_K(x) = \chi_{[-c,c]}(x)$. Evaluando la integral de (3.17) obtenemos que,

$$\begin{aligned} E(K,\tau) &= 4\int_0^c \frac{\chi_{[-c,c]}(x)}{\tau^2x^2 - (\chi_{[-c,c]}(x))^2}\, dx = 4\int_0^c \frac{1}{\tau^2x^2-1}\, dx \\ &= \frac{4}{\tau^2}\int_0^c \frac{1}{x^2-\frac{1}{\tau^2}}\, du = \frac{2}{\tau}\log\left(\frac{1-\tau c}{1+\tau c}\right) \end{aligned}$$

y $\log\left(\frac{1-\tau c}{1+\tau c}\right)$ representa la rama analítica del logaritmo tal que $\log\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = -i\frac{\pi}{2}$.

En particular, notemos que podemos interpretar el caso límite $c \to 0$ para representar una suma respecto a un rectángulo infinitamente alto y estrecho (ver figuras 3.2 y 3.3), lo que significa, sumar primero respecto a n y después respecto a m como en la definición original (3.1) de $G_2(\tau)$. En este caso, tiene sentido pensar que la función residual sea igual a 0, de hecho $\lim_{c\to 0} \frac{2}{\tau}\log\left(\frac{1-\tau c}{1+\tau c}\right) = 0$. Considerando el caso extremo, podemos considerar cuando $c \to \infty$ para representar que estamos sumando en un rectángulo infinitamente ancho y bajo (ver figuras 3.4 y 3.5), es decir, primero sumar en m y a continuación sumar en n. En este caso tenemos que $\lim_{c\to\infty} \frac{2}{\tau}\log\left(\frac{1-\tau c}{1+\tau c}\right) = -\frac{2\pi i}{\tau}$ y de hecho es coherente con al relación (3.5).

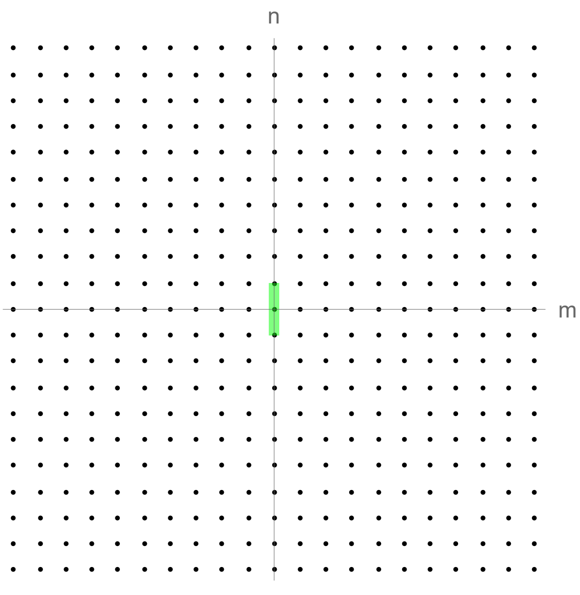

Figura 3.2: Primer paso, $c \to 0$.

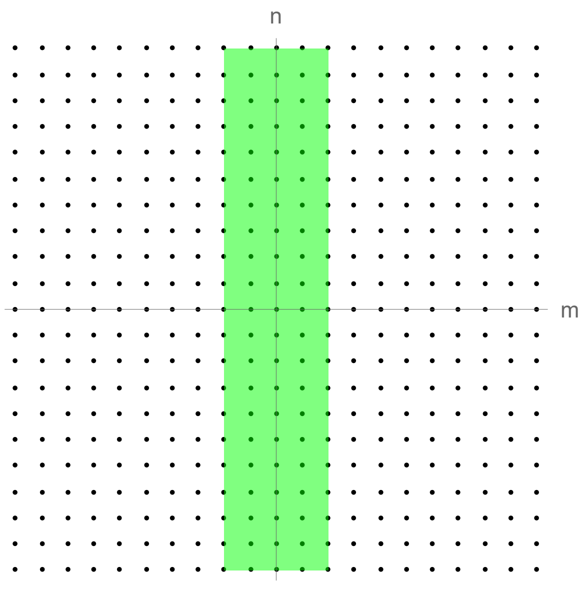

Figura 3.3: Siguiente paso, $\lambda \to \infty$.

3.1.1. Demostración del teorema de la función residual

Una parte fundamental de la prueba es el siguiente lema, que prueba que la parte de la derecha de (3.17) es la $K - suma$ de una serie telescópica en el índice n. Usaremos esta serie para escribir $G_2(\tau)$ como una serie que converge absolutamente, lo que nos permitirá compararla

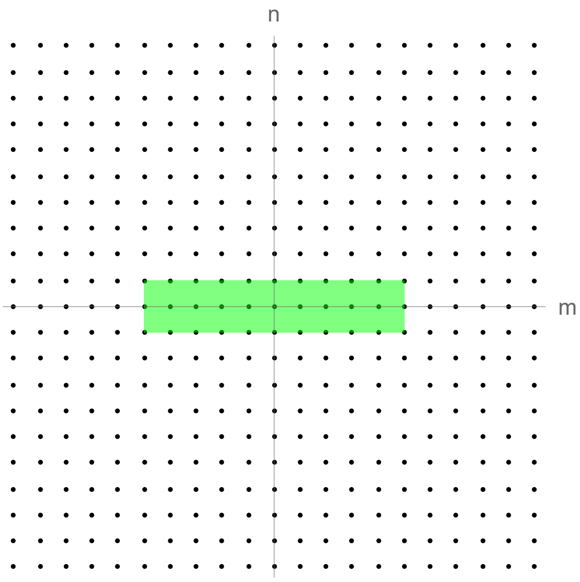

Figura 3.4: Primer paso, $c \to \infty$.

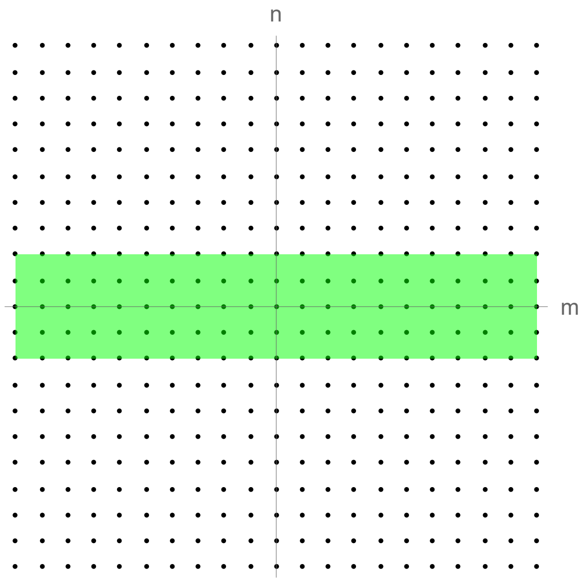

Figura 3.5: Siguiente paso, $\lambda \to \infty$.

con $G_2(K,\tau)$ y ver que la serie telescópica antes mencionada coincide con la función residual $E(K,\tau)$.

Lema 3.1.2 *Sea $K \in \mathcal{K}$ un conjunto con función h_K de soporte $[-A,A]$. Entonces,*

$$\sum_K \left(\frac{1}{m\tau+n} - \frac{1}{m\tau+n+1} \right) = 4\int_0^A \frac{h_K(x)}{\tau^2 x^2 - h_K^2(x)} dx,$$

donde, en la suma de la izquierda, excluimos los sumandos tal que $m=0$, es decir, tomamos $a_{0,n}=0$ para todo n en (3.15)*.*

Demostración:
Durante la demostración cambiaremos $h = h_K$ con el fin de abreviar la notación. Para evaluar la suma del lema, notemos que la podemos reescribir de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} J &:= \sum_K \left(\frac{1}{m\tau+n} - \frac{1}{m\tau+n+1} \right) \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \sum_{\substack{-\lambda A \le m \le \lambda A \\ m\neq 0}} \; \sum_{-\lambda h(m/\lambda) \le n \le \lambda h(m/\lambda)} \left(\frac{1}{m\tau+n} - \frac{1}{m\tau+n+1} \right). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Sumando de forma telescópica el sumatorio de dentro obtenemos,

$$J = \lim_{\lambda\to\infty} \sum_{\substack{-\lambda A \le m \le \lambda A \\ m\neq 0}} \left(\frac{1}{m\tau - \left\lfloor \lambda h\left(\frac{m}{\lambda}\right)\right\rfloor} - \frac{1}{m\tau + \left\lfloor \lambda h\left(\frac{m}{\lambda}\right)\right\rfloor} + \frac{1}{m\tau + \left\lfloor \lambda h\left(\frac{m}{\lambda}\right)\right\rfloor} \right.$$
$$\left. - \frac{1}{m\tau + \left\lfloor \lambda h\left(\frac{m}{\lambda}\right)\right\rfloor + 1} \right)$$

$$= \lim_{\lambda\to\infty} \sum_{\substack{-\lambda A \le m \le \lambda A \\ m\neq 0}} \left(\frac{2\left\lfloor \lambda h\left(\frac{m}{\lambda}\right)\right\rfloor}{m^2\tau^2 - \left\lfloor \lambda h\left(\frac{m}{\lambda}\right)\right\rfloor^2} + \frac{1}{\left(m\tau + \left\lfloor \lambda h\left(\frac{m}{\lambda}\right)\right\rfloor\right)\left(m\tau + \left\lfloor \lambda h\left(\frac{m}{\lambda}\right)\right\rfloor + 1\right)} \right)$$
$$= 2 \lim_{\lambda\to\infty} \sum_{1\le m \le \lambda A} \left(\frac{2\left\lfloor \lambda h\left(\frac{m}{\lambda}\right)\right\rfloor}{m^2\tau^2 - \left\lfloor \lambda h\left(\frac{m}{\lambda}\right)\right\rfloor^2} \right)$$
$$= 4 \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda} \sum_{1\le m \le \lambda A} \left(\frac{\lambda^{-1}\left\lfloor \lambda h\left(\frac{m}{\lambda}\right)\right\rfloor}{\lambda^{-2}m^2\tau^2 - \lambda^{-2}\left\lfloor \lambda h\left(\frac{m}{\lambda}\right)\right\rfloor^2} \right),$$

donde en la tercera igualdad hemos utilizado el teorema de convergencia dominada de Lebesgue para eliminar el segundo sumando. Además, como $\lambda^{-1}\left\lfloor \lambda h\left(\frac{m}{\lambda}\right)\right\rfloor \sim h\left(\frac{m}{\lambda}\right)$ y $\lambda^{-2}\left\lfloor \lambda h\left(\frac{m}{\lambda}\right)\right\rfloor^2 \sim h\left(\frac{m}{\lambda}\right)^2$ cuando $\lambda \to \infty$, y también, como la función $\frac{\lambda^{-1}\lfloor \lambda h(x)\rfloor}{x^2\tau^2 - \lambda^{-2}\lfloor \lambda h(x)\rfloor^2}$ converge uniformemente a $\frac{h(x)}{x^2\tau^2 - h(x)^2}$ tenemos que el límite anterior es el mismo que la suma de Riemann,

$$4 \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda} \sum_{1\le m \le \lambda A} \left(\frac{h\left(\frac{m}{\lambda}\right)}{\lambda^{-2}m^2\tau^2 - h\left(\frac{m}{\lambda}\right)^2} \right),$$

que es la integral del lema. □

A continuación probamos el teorema 3.1.1. Observamos ahora que,

$$\sum_{m\neq 0} \left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{m\tau + n} - \frac{1}{m\tau + n + 1} \right) \right] = 0.$$

Para probar esto notemos que para todo $m \neq 0$, la suma de dentro converge absolutamente ya que los sumandos son del orden de $O(1/n^2)$ cuando $n \to \infty$ y dicha suma es igual a,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N-1} \left(\frac{1}{m\tau + n} - \frac{1}{m\tau + n + 1} \right) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{m\tau - N} - \frac{1}{m\tau + N} \right) = 0.$$

Por lo que podemos escribir $G_2(\tau)$ de una forma distinta, es decir,

$$\begin{aligned}
G_2(\tau) - \sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2} &= \sum_{m\neq 0}\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(n+m\tau)^2}\right] \\
&= \sum_{m\neq 0}\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(n+m\tau)^2}\right] - \sum_{m\neq 0}\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{m\tau+n}-\frac{1}{m\tau+n+1}\right)\right] \\
&= \sum_{m\neq 0}\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(m\tau+n)^2(m\tau+n+1)}\right]. \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Esta serie tiene la ventaja de que converge absolutamente.

Lo siguiente que observamos es que la definición 7 se puede expresar así,

$$G_2(K,\tau) = \sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2} + \lim_{\lambda\to\infty}\sum_{\substack{-\lambda A\leq m\leq \lambda A\\ m\neq 0}}\ \sum_{-\lambda h(m/\lambda)\leq n\leq \lambda h(m/\lambda)}\frac{1}{(m\tau+n)^2}. \qquad (3.20)$$

Combinando (3.18) y (3.20), obtenemos,

$$\begin{aligned}
&G_2(K,\tau) - \sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2} - \sum_{K}\left(\frac{1}{m\tau+n}-\frac{1}{m\tau+n+1}\right) \\
&= \lim_{\lambda\to\infty}\sum_{\substack{-\lambda A\leq m\leq \lambda A\\ m\neq 0}}\ \sum_{-\lambda h(m/\lambda)\leq n\leq \lambda h(m/\lambda)}\left(\frac{1}{(m\tau+n)^2}-\frac{1}{m\tau+n}+\frac{1}{m\tau+n+1}\right) \\
&= \lim_{\lambda\to\infty}\left[\sum_{\substack{-\lambda A\leq m\leq \lambda A\\ m\neq 0}}\ \sum_{-\lambda h(m/\lambda)\leq n\leq \lambda h(m/\lambda)}\frac{1}{(m\tau+n)^2(m\tau+n+1)}\right] \\
&= \sum_{m\neq 0}\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(m\tau+n)^2(m\tau+n+1)}\right], \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado que la serie converge absolutamente para justificar el reordenamiento de esta. Igualando ahora (3.19) y (3.21) tenemos que,

$$E(K,\tau) = G_2(K,\tau) - G_2(\tau) = \sum_{K}\left(\frac{1}{m\tau+n}-\frac{1}{m\tau+n+1}\right),$$

que junto con el lema 3.1.2 tenemos el resultado que buscábamos. □

Capítulo 4

Teorema de Lévy-Steinitz

Como ya hemos visto antes, el teorema de Riemann nos dice que dada una serie de números reales convergente que no converja absolutamente podemos reordenarla para que sume cualquier valor real. Otra forma alternativa de dar este resultado es la siguiente: el conjunto de las sumas de todos los reordenamientos convergentes de una serie de números reales es el conjunto vacío, un único punto o toda la recta real. Pero, ¿hay algún resultado semejante para el caso complejo? Y si existe, ¿podemos dar algún tipo de generalización? La respuesta es sí, es el llamado **teorema de Lévy-Steinitz**.

Teorema 4.0.1 (Lévy-Steinitz) *El conjunto de sumas de los reordenamientos convergentes de una serie de vectores en un espacio euclídeo real de dimensión finita es, o bien el vacío, o bien el trasladado de un subespacio (es decir, conjuntos de la forma $v+M$, donde v es un vector y M es un subespacio lineal).*

Este teorema fue probado por primera vez por P.Lévy [10] en 1905. Luego, en 1913, Steinitz [17] señaló que la demostración de Lévy estaba incompleta en los casos de dimensión mayor o igual que 3. Steinitz arregló la demostración de Lévy con un enfoque completamente distinto.

A continuación mostraremos el enfoque de Steinitz modificado por Gross [6]. Este es un resultado poco conocido y la demostración es bastante técnica. La que ofrecemos se debe a Rosenthal [15]. Dividiremos la demostración en sencillos pasos para que sea fácil de comprender.

Primero, probaremos el "teorema de confinamiento poligonal" probado por Gross [6], que afirma que dada una familia arbitraria finita de vectores con longitud menor que 1, que suman 0, puede ser reordenada de tal forma que la norma de las sumas parciales sea menor que cierta constante que solo depende de la dimensión del espacio.

Continuaremos con el "teorema de reordenamiento" que afirma que algún reordenamiento de una serie converge a S si una subsucesión de la sucesión de sumas parciales converge a S y la sucesión de términos converge a 0. Por último, presentaremos el teorema de Lévy-Steinitz.

A lo largo de este capítulo vamos a considerar la norma euclidiana en el espacio euclidiano y la convergencia asociada a dicha norma. En $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes, si utilizásemos otra norma, las estimaciones que se hacen tendrían que ir multiplicadas por el correspondiente factor.

4.1. El teorema de confinamiento poligonal

En la demostración de Steinitz y de Gross para el teorema de Lévy-Steinitz tenemos que el lema técnico fundamental es el siguiente.

Teorema 4.1.1 (Confinamiento poligonal) *Sea* $\{v_i : i = 1, ..., m\}$ *una familia finita de vectores en* $\mathbb{R}^n$ *cuya suma es 0 y* $\|v_i\| \leq 1$ *para todo* $i = 1, ..., m$*. Entonces, existe una constante* C_n*, que depende sólo de* n*, tal que existe una permutación* P *de* $(2, ..., m)$ *con la propiedad de que*

$$\left\| v_1 + \sum_{i=2}^{j} v_{P(i)} \right\| \leq C_n$$

para todo j*. Además, podemos tomar* $C_1 = 1$ *y* $C_n \leq \sqrt{4C_{n-1}^2 + 1}$ *para cada* n*.*

Demostración:
Consideraremos que los vectores son no nulos porque en ese caso la afirmación es trivial. Probaremos primero el caso $n = 1$ y el caso general lo probaremos de forma inductiva sobre la dimensión n. El caso $n = 1$ es fácil. Supongamos que $v_1 \geq 0$, el caso en el que $v_1 < 0$ se reduce al caso anterior multiplicando por -1 todos los vectores v_j (que en realidad son escalares porque $n = 1$). Ahora, elegimos $v_{P(2)} < 0$ y seguimos eligiendo $v's$ negativos hasta que la suma de todos los elegidos sea negativa. Ahora, elegimos los $v's$ positivos hasta que la suma se vuelva positiva. Continuamos con este método hasta que hayamos usado todos los vectores. Como $|v_i| \leq 1$ para todos los i, es obvio que el valor absoluto de cada suma parcial en este reordenamiento estará entre 0 y 1. Por tanto, $C_1 = 1$. Notemos que en este caso la idea usada es la misma que para demostrar el teorema de Riemann.

Ahora veamos el caso general. Asumamos que $n > 1$ y tenemos dado C_{n-1}. Consideremos una colección de vectores $\{v_i\}$ verificando las hipótesis. Como $\{v_i\}$ es finita, entonces hay un número finito de posibles sumas parciales de los $v's$ que comienzan por v_1. Llamemos L a la suma de este tipo con mayor norma de entre todas las posibles sumas. Entonces $L = v_1 + u_1 + \cdots + u_s$, donde $\{u_1, ..., u_s\} \subset \{v_i\}$. Llamemos $\{w_1, ..., w_t\}$ al resto de $v's$. De modo que $L + w_1 + \cdots + w_t = 0$.

Usaremos la notación $\langle u, v\rangle$ para denotar el producto escalar de u y v. Empezaremos probando que los $\{u_i\}$ "apuntan" en la misma dirección que L mientras que los $\{w_i\}$ "apuntan" en la dirección contraria, es decir, $\langle u_i, L\rangle \geq 0 \forall i \in (1, \ldots, s)$ y $\langle w_i, L\rangle \leq 0 \forall i \in (1, \ldots, t)$. Otra forma de entenderlo, podría ser que los vectores $\{u_i\}$ hacen que la longitud de L aumente mientras que si le sumásemos a L algún vector w_i entonces su norma disminuiría. De esta forma, obtendríamos un esquema como el que aparece en la figura 4.1.

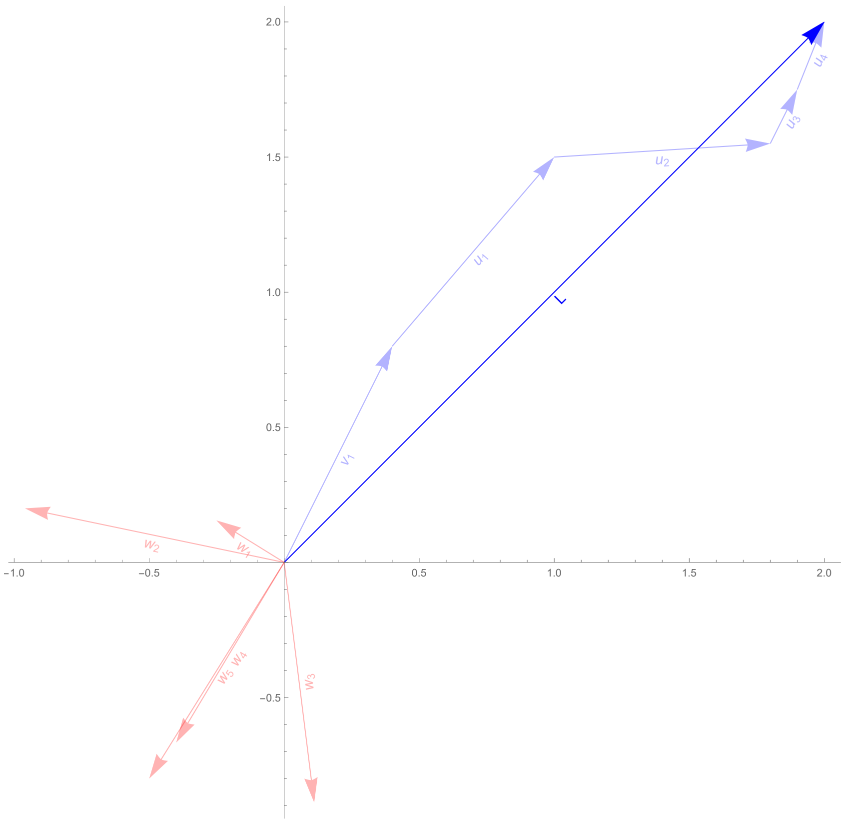

Figura 4.1: En azul oscuro tendríamos el vector L. En azul más claro tenemos los vectores $\{u_i\}$ dispuestos uno tras otro y en rojo más claro tenemos los vectores $\{w_i\}$.

Empecemos probando las afirmaciones que hemos hecho anteriormente.

- $\langle u_i, L\rangle \geq 0$ para todo i.
  Supongamos que $\langle u_i, L\rangle < 0$, para algún i. Entonces,
  $$\left\langle L - u_i, \frac{L}{\|L\|}\right\rangle = \frac{\langle L, L\rangle}{\|L\|} - \frac{1}{\|L\|}\langle u_i, L\rangle = \|L\| - \frac{\langle u_i, L\rangle}{\|L\|} > \|L\|\,.$$
  Donde en la última desigualdad hemos utilizado que $\langle u_i, L\rangle < 0$.
  Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos que,
  $$\|L - u_i\| \geq \left\langle L - u_i, \frac{L}{\|L\|}\right\rangle > \|L\| \implies \|L - u_i\| > \|L\|\,.$$
  Esto último contradice que L sea el vector con mayor norma y por tanto, $\langle u_i, L\rangle \geq 0$ para todo i.

- $\langle v_1, L\rangle \geq 0$.
  Como antes, supongamos que $\langle v_1, L\rangle < 0$. Entonces,
  $$\left\langle \frac{-L}{\|L\|}, v_1 + w_1 + \cdots + w_t\right\rangle = \left\langle \frac{-L}{\|L\|}, v_1 - L\right\rangle = -\frac{\langle L, v_1\rangle}{\|L\|} + \frac{\|L\|^2}{\|L\|} > \|L\|\,.$$

Donde en la última desigualdad hemos utilizado que $\langle v_1, L\rangle < 0$.
Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos que,

$$\|v_1 + w_1 + \cdots + w_t\| \geq \left\langle \frac{-L}{\|L\|}, v_1 + w_1 + \cdots + w_t \right\rangle > \|L\|$$
$$\implies \|v_1 + w_1 + \cdots + w_t\| > \|L\|.$$

Esto último contradice que L sea el vector con mayor norma y por tanto, $\langle v_1, L\rangle \geq 0$.

- $\langle w_i, L\rangle \leq 0$ para todo i.
  Supongamos que $\langle w_i, L\rangle > 0$, para algún i. Entonces,

$$\left\langle L + w_i, \frac{L}{\|L\|} \right\rangle = \frac{\langle L, L\rangle}{\|L\|} + \frac{1}{\|L\|}\langle w_i, L\rangle = \|L\| + \frac{\langle w_i, L\rangle}{\|L\|} > \|L\|.$$

  Donde en la última desigualdad hemos utilizado que $\langle w_i, L\rangle > 0$.
  Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos que,

$$\|L + w_i\| \geq \left\langle L + w_i, \frac{L}{\|L\|} \right\rangle > \|L\| \implies \|L + w_i\| > \|L\|$$

  Esto último contradice que L sea el vector con mayor norma y por tanto, $\langle w_i, L\rangle \leq 0$ para todo i.

Ahora nuestro siguiente paso será usar la hipótesis de inducción en el siguiente espacio de dimensión $n-1$,

$$L^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, L\rangle = 0\}.$$

Denotemos como v' la proyección del vector v en $L^{\perp}$, en otras palabras,

$$v' = v - \frac{\langle v, L\rangle}{\|L\|^2}L \qquad \text{y} \qquad \|v'\|^2 + \left\|\frac{\langle v, L\rangle L}{\|L\|^2}\right\|^2 = \|v\|^2. \tag{4.1}$$

Como $L = v_1 + u_1 + \cdots + u_s$ se tiene $v_1' + u_1' + \cdots + u_s' = 0$. De igual forma obtenemos que $w_1' + \cdots + w_t' = 0$. Y como $\|v_i\| \leq 1$ $\forall i = 1, ..., m$ y $\|v\| \geq \|v'\|$, entonces tenemos que $\|v_1'\| \leq 1$, $\|u_i'\| \leq 1$ $\forall i = 1, ..., s$ y $\|w_i'\| \leq 1$ $\forall i = 1, ..., t$. Aplicando ahora la hipótesis de inducción, sabemos que existe una permutación $\mathcal{Q}$ de $(1, ..., s)$ tal que

$$\left\|v_1' + \sum_{i=1}^{j} u'_{\mathcal{Q}(i)}\right\| \leq C_{n-1} \text{ con } j = 1, ..., s,$$

y existe otra permutación $\mathcal{R}$ de $(2, ..., t)$ tal que

$$\left\|w_1' + \sum_{i=2}^{j} w'_{\mathcal{R}(i)}\right\| \leq C_{n-1} \text{ con } j = 2, ..., t.$$

Para las cuentas que vendrán a continuación y para facilitar la notación definiremos $\mathcal{R}(1) = 1$.

Ya tenemos las componentes ortogonales ordenadas de modo que hemos conseguido acotar sus sumas parciales en $L^{\perp}$, buscamos mantener dicho orden. Pero, al mismo tiempo mantener la componente en L con longitud como mucho 1 (como en el caso $n = 1$). Para ser exactos, como $\langle v_1, L\rangle \geq 0$ y $\langle w_i, L\rangle \leq 0$, podemos elegir el menor r, llamémoslo r_1 tal que,

$$\langle v_1, L\rangle + \sum_{i=1}^{r_1} \left\langle w_{\mathcal{R}(i)}, L\right\rangle \leq 0.$$

Con todo, ¿haber elegido este orden nos asegura que la norma de las sumas parciales de la componente en L son como mucho 1? Veamos que sí. Lo primero es dar una expresión de las sumas parciales en función de la cantidad de términos sumados,

$$\mathcal{S}(j) = \frac{\langle v_1, L\rangle + \sum_{i=1}^{j} \left\langle w_{\mathcal{R}(i)}, L\right\rangle}{\|L\|} \text{ con } j = 0, 1, ..., r_1.$$

Debemos ver que $\mathcal{S}(j) \in [-1, 1]$, ya que entonces $|\mathcal{S}(j)| \in [0, 1]$. Para probar esto, fijémonos en que $\mathcal{S}(j)$ es decreciente, alcanzando su mayor valor positivo en $\mathcal{S}(0)$ y alcanzando en $\mathcal{S}(r_1)$ su único valor negativo. Además,

$$\mathcal{S}(0) = \frac{\langle v_1, L\rangle}{\|L\|} \leq \|v_1\| \leq 1,$$

$$\mathcal{S}(r_1) = \underbrace{\frac{\langle v_1, L\rangle + \sum_{i=1}^{r_1-1} \left\langle w_{\mathcal{R}(i)}, L\right\rangle}{\|L\|}}_{\in [0,1]} + \underbrace{\frac{\left\langle w_{\mathcal{R}(r_1)}, L\right\rangle}{\|L\|}}_{\in [-1,0]} \in [-1, 1].$$

Por tanto, $\mathcal{S}(j) \in [-1, 1]\ \forall\ j = 0, 1, ..., r_1$, verificando así que las componentes en L se mantienen con módulo, como mucho 1. Ahora que hemos verificado que esta es una buena técnica para reordenarlos, seguimos de manera análoga. Elegimos el menor s_1 tal que,

$$\langle v_1, L\rangle + \sum_{i=1}^{r_1} \left\langle w_{\mathcal{R}(i)}, L\right\rangle + \sum_{i=1}^{s_1} \left\langle u_{\mathcal{Q}(i)}, L\right\rangle \geq 0.$$

Después el menor r_2 tal que,

$$\langle v_1, L\rangle + \sum_{i=1}^{r_1} \left\langle w_{\mathcal{R}(i)}, L\right\rangle + \sum_{i=1}^{s_1} \left\langle u_{\mathcal{Q}(i)}, L\right\rangle + \sum_{i=r_1+1}^{r_2} \left\langle w_{\mathcal{R}(i)}, L\right\rangle \leq 0.$$

Así sucesivamente. Por último ordenamos los vectores $\{v_i\}$ de la siguiente forma,

$$(v_1, w_{\mathcal{R}(1)}, ..., w_{\mathcal{R}(r_1)}, u_{\mathcal{Q}(1)}, ..., u_{\mathcal{Q}(s_1)}, w_{\mathcal{R}(r_1+1)}, ..., w_{\mathcal{R}(r_2)}, ...).$$

En este reordenamiento, vemos que las componentes en L de cada suma parcial tienen a lo sumo norma 1 (el argumento sería el mismo utilizado para el primer caso). Además, la forma en la que hemos elegido las permutaciones $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{R}$ nos aseguran que las componentes ortogonales a L tienen norma como mucho $C_{n-1} + C_{n-1}$. Por tanto, por la identidad pitagórica (4.1) obtenemos que la norma de cada suma parcial es como mucho $\sqrt{(2C_{n-1})^2 + 1}$. Lo que da por finalizada la prueba del teorema de confinamiento poligonal. $\square$

4.2. El teorema de reordenamiento

El teorema de reordenamiento es un resultado muy importante para la prueba de Steinitz del teorema de Lévy-Steinitz aunque también tiene interés por si sólo.

Para la prueba del teorema de reordenamiento, daremos primero un lema auxiliar que no es más que una consucesión del teorema de confinamiento poligonal que acabamos de ver, pero, para facilitar el entendimiento al lector, procedemos a separarlo.

Lema 4.2.1 *Sean $\{v_i : i = 1, ..., m\} \subset \mathbb{R}^n$ y $\|\sum_{i=1}^m v_i\| \leq \epsilon$, $\|v_i\| \leq \epsilon$ para todo i, entonces hay una permutación P de $(1, ..., m)$ tal que*

$$\left\|v_{P(1)} + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(r)}\right\| \leq \epsilon(C_n + 1)$$

para todo r, donde C_n son las constantes que aparecen en el teorema 4.1.1.

Demostración:
Definimos $v_{m+1} = -v_1 - \cdots - v_m$ de tal forma que $\sum_{i=1}^{m+1} v_i = 0$. Por el teorema de confinamiento poligonal, existe una permutación P de $(2, ..., m + 1)$ tal que

$$\left\|\frac{1}{\epsilon}v_1 + \sum_{i=2}^{r} \frac{1}{\epsilon}v_{P(i)}\right\| \leq C_n \qquad \forall r = 2, ..., m + 1.$$

Entonces $\left\|v_1 + \sum_{i=2}^r v_{P(i)}\right\| \leq \epsilon C_n$ para todo r, $1 \leq r \leq m$. Definamos $P(1) = 1$ y ordenemos los $\{v_i\}$ de acuerdo a la permutación P, pero omitimos v_{m+1}; como $\|v_{m+1}\| = \|\sum_{i=1}^m v_i\| \leq \epsilon$ esto cambia la norma de las sumas parciales como mucho en una cantidad ϵ. Por tanto, este reordenamiento hace que todas las sumas parciales tenga como mucho norma $\epsilon + \epsilon C_n$. Lo que prueba el lema. □

Teorema 4.2.2 (Reordenamiento) *Si una subsucesión de una sucesión de sumas parciales de una serie de vectores en $\mathbb{R}^n$ converge a S, y la sucesión de términos de la serie converge a 0, entonces existe un reordenamiento de la serie que suma S*

Demostración:
Sea $(v_i)_{i=1}^\infty$ una sucesión de vectores en $\mathbb{R}^n$ que converge al vector nulo. Para cada m definimos $S_m = \sum_{i=1}^m v_i$. Asumimos por las hipótesis del teorema que existe una subsucesión (S_{m_k}), tal que, $\lim_{k\to\infty} S_{m_k} = S$. Debemos mostrar como reordenar los (v_i) de tal forma que la sucesión de sumas parciales converja a S. La idea será usar el Lema 4.2.1 para obtener ordenaciones de cada una de las familias $(v_{m_k+1}, ..., v_{m_{k+1}-1})$ de tal forma que las sumas parciales de dichas familias se hagan pequeñas. Entonces S_m estará cerca a S_{m_k} si m está entre m_k y m_{k+1}.

Esto se puede escribir de la siguiente manera. Sea $\delta_k = \|S_{m_k} - S\|$, entonces $\lim_{k\to\infty} \delta_k = 0$.

Ahora,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}-1} v_i \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{m_{k+1}} v_i - \sum_{i=1}^{m_k} v_i - v_{m_{k+1}} \right\| \\
&= \left\| \left(\sum_{i=1}^{m_{k+1}} v_i - S \right) - \left(\sum_{i=1}^{m_k} v_i - S \right) - v_{m_{k+1}} \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{i=1}^{m_{k+1}} v_i - S \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{m_k} v_i - S \right\| + \left\| v_{m_{k+1}} \right\| \\
&= \delta_{k+1} + \delta_k + \left\| v_{m_{k+1}} \right\|.
\end{aligned}$$

Ahora, para cada k definimos,

$$\epsilon_k = \max \left\{ \delta_{k+1} + \delta_k, \sup\{\|v_i\| : i \geq m_k\} \right\}.$$

Entonces $\lim_{k\to\infty} \epsilon_k = 0$, ya que $\lim_{k\to\infty} \delta_k = 0$ y $\lim_{i\to\infty} \|v_i\| = 0$ por las hipótesis del teorema. Por tanto,

$$\left\| \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}-1} v_i \right\| \leq 2\epsilon_k.$$

Como $\|v_i\| \leq \epsilon_k$ cuando $i \geq m_k$, en particular, $\|v_i\| \leq 2\epsilon_k$ cuando $i = m_k + 1, ..., m_{k+1} - 1$. Por tanto, aplicando el Lema 4.2.1 a los vectores $(v_{m_k+1}, ..., v_{m_{k+1}-1})$ tenemos que existe una permutación P de $(m_k + 1, ..., m_{k+1} - 1)$ tal que,

$$\left\| \sum_{i=m_k+1}^{r} v_{P_k(i)} \right\| \leq 2\epsilon_k(C_n + 1)$$

para $r = m_k + 1, ..., m_{k+1} - 1$.

Ahora ordenamos los (v_i) de la siguiente forma. Mantenemos v_{m_k} en la posición m_k para cada k. Después ordenamos los v_i para $(m_k + 1) \leq i \leq (m_{k+1} - 1)$ de acuerdo a la permutación P_k. En este reordenamiento, si $m_k + 1 \leq m \leq m_{k+1} - 1$, entonces $S_m - S_{m_k}$ es una suma de la forma $\sum_{i=m_k+1}^{m} v_{P_k(i)}$ con $m < m_{k+1}$ y, por lo tanto, tiene norma, como mucho, $2\ \epsilon_k(C_n + 1)$. Como $\lim_k S_{m_k} = S$ y $\lim_k \epsilon_k = 0$, se tiene que $\lim_k S_m = S$. O dicho de otra forma,

$$\begin{aligned}
\|S_m - S\| &= \|S_m - S_{m_k} + S_{m_k} - S\| \\
&\leq \|S_m - S_{m_k}\| + \|S_{m_k} - S\| \\
&\leq 2\epsilon_k(C_n + 1) + \delta_k \to 0
\end{aligned}$$

Por tanto, $\lim_k S_m = S$. □

4.3. El teorema de Lévy-Steinitz

Para probar el teorema de Lévy-Steinitz necesitaremos otra consecuencia del teorema de confinamiento poligonal además del teorema de reordenamiento.

Lema 4.3.1 *Sean* $(v_i)_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^n$, $w = \sum_{i=1}^m v_i$, $0 < t < 1$, *y* $\|v_i\| \leq \epsilon$ *para todo* i, *entonces o* $\|v_1 - tw\| \leq \epsilon\sqrt{C_{n-1}^2 + 1}$ *o existe una permutación* P *de* $(2, ..., m)$ *y un* r *entre 2 y* m *tal que* $\left\|v_1 + \sum_{i=2}^r v_{P(i)} - tw\right\| \leq \epsilon\sqrt{C_{n-1}^2 + 1}$.

Demostración:

Supongamos $w \neq 0$, en caso contrario el resultado sería trivial. Consideremos primero el caso $n = 1$. Además podemos considerar $w > 0$, si fuese negativo, valdría con multiplicar por -1 todos los escalares y hacer el razonamiento que sigue para ellos. Denotemos como s el menor i tal que

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_i > tw \text{ y } v_1 + v_2 + \cdots + v_{i-1} \leq tw.$$

Notemos que existe algún s con esa propiedad, si $v_1 \geq w$, entonces $0 \leq tw - v_1 \leq v1 \leq \epsilon$ y este caso sería la primera posibilidad en el lema). Si por el contrario $v_1 < tw$, como $v_1 + v_2 + \cdots + v_m = w > tw$ ya que $t \in (0, 1)$, entonces existe un s con las propiedades buscadas. Ahora bien,

$$\begin{aligned}
|v_1 + \cdots + v_s - tw| &= |\underbrace{v_1 + \cdots + v_{s-1} - tw + v_s}_{>0}| \\
&= \underbrace{v_1 + \cdots + v_{s-1} - tw}_{<0} + \underbrace{v_s}_{>0} \\
&= |v_s| - |v_1 + \cdots + v_{s-1} - tw| \\
&\leq |v_s| \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto, en el caso $n = 1$ el lema es cierto definiendo $C_{n-1} = C_0 = 0$. Notemos también que en el caso $n = 1$ no necesitamos reordenar para que se cumpla el lema.

Consideremos el caso general de $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$. En este caso utilizaremos la misma idea usada en la demostración del teorema de confinamiento poligonal. Como $w = \sum_{i=1}^m v_i$, las proyecciones (v_i') de los vectores (v_i) sobre $(w)^\perp$ suman 0. Como $\|v_i\| \leq \epsilon$ para todo i, entonces, por el teorema de confinamiento poligonal tenemos que existe una permutación P de $(2, ..., m)$ tal que,

$$\left\|\frac{1}{\epsilon}v_1' + \frac{1}{\epsilon}v_{P(2)}' + \cdots + \frac{1}{\epsilon}v_{P(j)}'\right\| \leq C_{n-1}$$

para $j = 2, ..., m$. Además,

$$\left\langle v_1, \frac{w}{\|w\|}\right\rangle + \left\langle v_{P(2)}, \frac{w}{\|w\|}\right\rangle + \cdots + \left\langle v_{P(m)}, \frac{w}{\|w\|}\right\rangle = \|w\|,$$

y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz $\left|\frac{\langle v_i, w\rangle}{\|w\|}\right| \leq \|v_i\| \leq \epsilon$ para todo i. Aplicando ahora el caso $n = 1$, tenemos que existe un r tal que,

$$\left|\left\langle v_1, \frac{w}{\|w\|}\right\rangle + \left\langle v_{P(2)}, \frac{w}{\|w\|}\right\rangle + \cdots + \left\langle v_{P(r)}, \frac{w}{\|w\|}\right\rangle - t\|w\|\right| \leq \epsilon. \tag{4.2}$$

Así, aplicando la identidad pitagórica tenemos que,

$$\left\|v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(r)} - tw\right\|^2 \leq (\epsilon C_{n-1})^2 + \epsilon^2,$$

que es una de las dos posibilidades que nos dice el lema, pero para ello hemos asumido en (4.2) que existe un r entre 2 y m, pero podría haberse dado el caso en el que dicho r no existiese y se verificase la primera opción del lema. En ese caso es más sencillo de probar, ya que,

$$\left\|v_1'\right\| \leq \|v_1\| \leq \epsilon \qquad \left|\left\langle v_1, \frac{w}{\|w\|}\right\rangle - t\,\|w\|\right| \leq \epsilon.$$

Donde la primera desigualdad se obtiene directamente de las hipótesis y la segunda del caso $n = 1$ cuando se considera la primera posibilidad. Ahora, aplicando como antes la identidad pitagórica, tenemos que,

$$\|v_1 - tw\|^2 \leq \epsilon^2 + \epsilon^2 \leq (\epsilon C_{n-1})^2 + \epsilon^2.$$

□

Ya podemos probar el teorema principal de este capítulo.

Teorema 4.3.2 (Lévy-Steinitz) *El conjunto de todas las sumas de los reordenamientos convergentes de una serie de vectores en $\mathbb{R}^n$ es el conjunto vacío o el trasladado de un subespacio.*

Demostración:

Denotemos por S el conjunto de todas las sumas de reordenamientos convergentes de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$. Si no existiese ningún reordenamiento convergente, tendríamos el conjunto vacío, así que supongamos que S no es vacío y que S tiene más de un elemento. Podemos asumir que $0 \in S$, de no ser así, bastaría con sustituir v_1 por $v_1 - v$ donde v sería cualquier elemento de S. Ahora, debemos probar que S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. El guión que seguiremos para probar que si 0, s_1 y s_2 están en S implica que $s_1 + s_2$ está también en S es el siguiente. Tomaremos una sucesión (ϵ_m) de números positivos que converja a 0. Formaremos sumas parciales de $\sum v_i$, en cierto orden, para que esté a una distancia ϵ_1 de s_1. Después construimos una suma parcial que contenga todos los vectores ya usados y que esté a una distancia ϵ_1 de 0 y después otra suma parcial con los vectores ya usados cuyo valor esté a una distancia ϵ_1 de s_2. Después formamos otra suma parcial que esté a distancia ϵ_2 de s_1, a una distancia ϵ_2 de 0 y a una distancia ϵ_2 de s_2 y así sucesivamente. Los vectores usados entre una suma cercana al 0 y la siguiente suma cercana a s_2 sumarán aproximadamente s_2. Adicionándolos con los vectores cuya suma estaba cercana a s_1 y cercana a 0 tendremos sumas parciales cercanas a $s_1 + s_2$.

Ahora, presentamos los detalles. Sea (ϵ_m) una sucesión de números positivos que converge a 0. Como una reordenamiento converge a s_1 (ya que $s_1 \in S$), entonces existe un conjunto finito I_1 de enteros positivos tal que $1 \in I_1$ y $\left\|\sum_{i\in I_1} v_i - s_1\right\| < \epsilon_1$. De igual manera, como una reordenamiento de nuestra serie converge a 0, existe un conjunto finito de enteros positivos J_1 tal que $I_1 \subset J_1$ y $\left\|\sum_{i\in J_1} v_i - 0\right\| < \epsilon_1$ y por último, también existirá un conjunto K_1, tal que $J_1 \subset K_1$ que verifica $\left\|\sum_{i\in K_1} v_i - s_2\right\| < \epsilon_1$ y así sucesivamente. Esto es, construimos los conjuntos I_m, J_m, K_m de enteros positivos verificando que,

$$\{1, ..., m-1\} \subset K_{m-1} \subset I_m \subset J_m \subset K_m,$$

$$\left\|\sum_{i\in I_m} v_i - s_1\right\| < \epsilon_m, \qquad \left\|\sum_{i\in J_m} v_i - 0\right\| < \epsilon_m, \qquad \text{y} \left\|\sum_{i\in K_m} v_i - s_2\right\| < \epsilon_m.$$

Para cada m, empezando por $m = 1$, ordenamos los índices en J_m, de tal forma que los que pertenecen a I_m aparezcan al principio. Después reordenamos los índices en K_m para que los que también pertenezcan al conjunto J_m aparezcan al principio. Por último reordenamos los índices de I_{m+1} para que los que pertenecen a K_m estén al principio. Así tenemos la permutación P del conjunto de enteros positivos y las sucesiones crecientes (i_m), (j_m), (k_m) tal que $i_m < j_m < k_m < i_{m+1}$ donde $i_m = |I_m|$, $j_m = |J_m|$, $k_m = |K_m|$ y que verifican, al igual que antes, que,

$$\left\|\sum_{i=1}^{i_m} v_{P(i)} - s_1\right\| < \epsilon_m, \qquad \left\|\sum_{j=1}^{j_m} v_{P(j)}\right\| < \epsilon_m, \qquad \left\|\sum_{k=1}^{k_m} v_{P(k)} - s_2\right\| < \epsilon_m$$

para cada m. Notemos ahora que,

$$\left\|\sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)} - s_2\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{k_m} v_{P(i)} - \sum_{j=1}^{j_m} v_{P(i)} - s_2\right\| < \epsilon_m + \epsilon_m.$$

De donde obtenemos que,

$$\left\|\sum_{i=1}^{i_m} v_{P(i)} + \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)} - (s_1 + s_2)\right\| < 3\epsilon_m.$$

Como vemos, hay un salto de índices, pasando del índice i_m hasta el $j_m + 1$. Por tanto, para poder obtener una suma parcial, necesitamos que todos nuestros índices estén seguidos. Para ello, para cada m reordenamos los vectores en $\{v_{P(i)} : i = i_m + 1, ..., k_m\}$ asignando a los vectores $\{v_{P(i)} : i = j_m + 1, ..., k_m\}$, las posiciones después de i_m y desplazando los que estaban en dichas posiciones $k_m - j_m$ unidades.

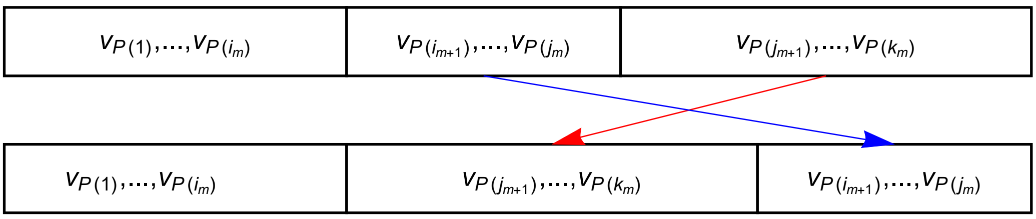

Figura 4.2: Diagrama donde se visualiza el reordenamiento mencionado anteriormente.

En este nuevo reordenamiento, hay una subsucesión de la sucesión de sumas parciales que converge a $s_1 + s_2$. Como además $S \neq \emptyset$, tenemos que, $(v_{P(i)}) \to 0$ y por el teorema de reordenamiento, debe de existir algún reordenamiento que haga que la serie converja a $s_1 + s_2$. Por tanto, $s_1 + s_2 \in S$.

Queda ahora probar que si $s \in S$, entonces $ts \in S$ para todo número real t. Pero como hemos visto que S es cerrado por sumas, entonces sabemos que esto es cierto cuando t es un entero positivo. Así que será suficiente probar los casos $t \in (0, 1)$ y $t = -1$.

Para probar esto utilizaremos la permutación P mencionada antes considerando $s_2 = S$, fijaremos un $t \in (0,1)$ y usaremos el lema 4.3.1. Como hemos visto antes,

$$\left\| \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)} - s_2 \right\| \leq 2\epsilon_m$$

para cada m. Sea $\delta_m := \sup\{\left\|v_{P(i)}\right\| : i = j_m + 1, ..., k_m\}$, y definamos

$$u_m := \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)} - s_2.$$

Por tanto, por el lema 4.3.1, existe una permutación $\mathcal{Q}_m$ de $\{P(j_m+1), ..., P(k_m)\}$ y un r_m tal que,

$$\left\| \sum_{i=j_m+1}^{r_n} v_{\mathcal{Q}_m(P(i))} - t(s_2 + u_m) \right\| \leq M\delta_m, \quad \text{donde } M = \sqrt{C_{n-1}^2 + 1}.$$

Entonces,

$$\left\| \sum_{i=j_m+1}^{r_n} v_{\mathcal{Q}_m(P(i))} - ts_2 \right\| < M\delta_m + 2\epsilon_m.$$

De donde se sigue que,

$$\left\| \sum_{i=1}^{j_m} v_{P(i)} + \sum_{i=j_m+1}^{r_n} v_{\mathcal{Q}_m(P(i))} - ts_2 \right\| < M\delta_m + 2\epsilon_m,$$

por lo tanto, en este reordenamiento tenemos una subsucesión de la sucesión de sumas parciales que converge a ts_2. Y el teorema de reordenamiento da lugar a que $ts_2 \in S$.

Solo queda probar que $-s_2 \in S$. Otra vez, consideramos la permutación P para $s_2 = S$ y tenemos que,

$$\left\| \sum_{i=1}^{j_{m+1}} v_{P(i)} - \sum_{i=1}^{k_m} v_{P(i)} - (0 - s_2) \right\| < \epsilon_{m+1} + \epsilon_m,$$

entonces,

$$\left\| \sum_{i=k_m+1}^{j_{m+1}} v_{P(i)} - (-s_2) \right\| < \epsilon_{m+1} + \epsilon_m.$$

Por tanto,

$$\left\| \sum_{i=1}^{j_m} v_{P(i)} + \sum_{i=k_m+1}^{j_{m+1}} v_{P(i)} - (-s_2) \right\| < \epsilon_{m+1} + 2\epsilon_m,$$

que haciendo el mismo paso final que hemos hecho en el caso de la suma, obtenemos que hay un reordenamiento que posee una subsucesión de la sucesión de sumas parciales que converge a $-s_2$ y por el teorema de reordenamiento tenemos que $-s_2 \in S$. $\square$

Tras este resultado se nos pueden ocurrir varias preguntas relacionadas con el teorema de Lévy-Steinitz.

1. **¿Se puede obtener cada subespacio trasladado como el conjunto se las sumas de reordenamientos convergentes de una serie?**

   La respuesta a esta pregunta se puede comprobar fácilmente que es sí. Tomamos M un subespacio cualquiera y tomamos v un vector cualquiera. Consideremos $\{e_1, ..., e_m\}$ una base de M y sea (x_i) una serie de números reales condicionalmente convergente (por ejemplo, $x_i = (-1)^i/i$). Por tanto, por el teorema de reordenamiento de Riemann tenemos que el conjunto de todas las sumas obtenidas por el reordenamiento de los vectores $\{v, x_i e_j : j = 1, ..., m; i = 1, 2, 3, ...\}$ es $v + M$ ya que claramente tenemos por un lado el vector v y por el otro lado tenemos todas las posibles combinaciones lineales de los vectores de la base, lo que genera el conjunto M.

2. **¿Qué condiciones para los vectores (v_i) determinan si el conjunto de sumas es el vacío, un trasladado de un subespacio o todo $\mathbb{R}^n$?**

   Tanto Lévy, como Steinitz estudiaron el teorema buscando una respuesta a esta pregunta. Lo primero que debemos notar es que el conjunto de sumas es el vacío a menos que $(v_i) \to 0$ y para cada vector w, las sumas $\sum_{i=1}^{\infty} \langle v_i, w \rangle^+$ y $\sum_{i=1}^{\infty} \langle v_i, w \rangle^-$ son las 2 o finitas o infinitas (donde $\langle v_i, w \rangle^+$ es 0 si $\langle v_i, w \rangle$ es negativo y $\langle v_i, w \rangle$ en caso contrario, y $\langle v_i, w \rangle^-$ es 0 si $\langle v_i, w \rangle$ es positivo y es $-\langle v_i, w \rangle$ en caso contrario). En caso de que se den las condiciones mencionadas, se puede probar que $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ converge. Si no hubiese convergencia absoluta en ninguna dirección (es decir, si para cada w, tanto $\sum_{i=1}^{\infty} \langle v_i, w \rangle^+$, como $\sum_{i=1}^{\infty} \langle v_i, w \rangle^-$ fuesen infinitos), entonces el conjunto de sumas es el espacio $\mathbb{R}^n$. Si existen vectores w distintos de 0 para los cuales las sumas de antes son ambas finitas, entonces el conjunto de sumas de sus reordenamientos es $v + M$, donde v es cualquier suma y M es el subespacio ortogonal al conjunto de w's tales que ambas sumas son finitas. Los resultados aquí mencionados ya aparecen en los trabajos originales de Lévy, Steinitz y Gross.

3. **¿Qué sucede en otros espacios vectoriales topológicos?**

   Como todos los espacios vectoriales topológicos de dimensión finita de la misma dimensión, son isomorfos, el teorema de Lévy-Steinitz sirve para cualquier espacio topológico de dimensión finita. Además el teorema también es válido para el espacio topológico vectorial de todas las sucesiones [8]. Pero, por ejemplo, en los espacios de Hilbert encontramos contraejemplos, el primero fue dado por Marcinkiewicz, el cual trataremos en el siguiente apartado.

4.4. Reordenamientos en espacios de Hilbert

Nos preguntamos, ¿existe algún análogo al teorema de Lévy-Steinitz para espacios de Banach de dimensión infinita? Esta pregunta aparece formulada, no de igual forma, en el *Cuaderno Escocés* [11]. Este documento tiene mucho valor histórico y creo que es bueno para el lector conocer un poco de esta historia. Este libro fue fruto de las reuniones que algunos de los

más prometedores estudiantes de matemáticas polacos mantenían en un café escocés en Lwów. Entre ellos se encontraban, Ulam, Banach, Kac, Mazur, Saks o Steinhaus. Como curiosidad, este problema, el número 106, fue propuesto por Banach y como premio regalaba una botella de vino. Fue resuelto negativamente por Jósef Marcinkiewicz mediante el siguiente contraejemplo en $L^2[0,1]$.
Consideremos las siguientes funciones en $L^2[0,1]$

$$f_{i,k} = \chi_{[\frac{k}{2^i},\frac{k+1}{2^i}]} \text{ y } g_{i,k} = -f_{i,k},$$

con $0 \leq i < +\infty$ y $0 \leq k < 2^i$ enteros y donde $\chi_{[\frac{k}{2^i},\frac{k+1}{2^i}]}$ representa la función que es igual a 1 en el intervalo $[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}]$ y vale 0 en $[0,1]\backslash[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}]$. Podemos ver una representación de algunas de estas funciones en las figuras 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6. Por un lado, uno tiene,

$$(f_{0,0} + g_{0,0}) + (f_{1,0} + g_{1,0}) + (f_{1,1} + g_{1,1}) + (f_{2,0} + g_{2,0}) + \cdots = 0.$$

Por otro lado, si reordenamos como sigue, tenemos,

$$f_{0,0} + (f_{1,0} + f_{1,1} + g_{0,0}) + (f_{2,0} + f_{2,1} + g_{1,0}) + (f_{2,2} + f_{2,3} + g_{1,1}) + \cdots = 1.$$

Pero ahora, notemos que reordenando los términos siempre obtendremos funciones con valores enteros, por lo que es imposible que un reordenamiento de las $f_{i,k}$ y las $g_{i,k}$ nos de como resultado, por ejemplo, la función $\frac{1}{2} \in L^2[0,1]$. Es decir, el conjunto de las sumas de los reordenamientos de las $f_{i,k}$ y $g_{i,k}$ no es un subespacio afín de $L^2[0,1]$.

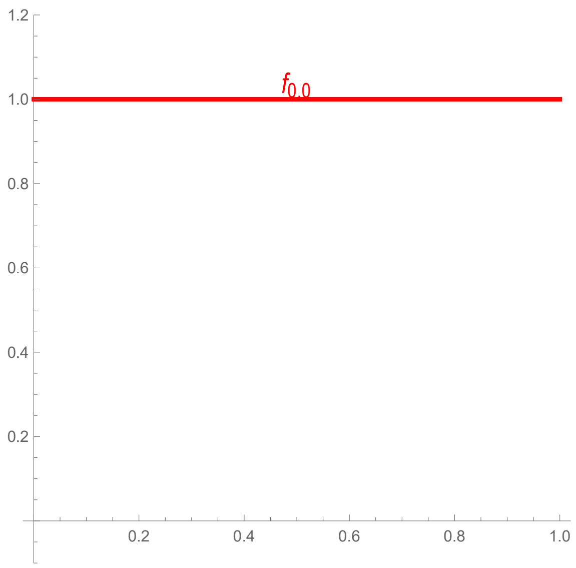

Figura 4.3: $f_{0,0}$ de Marcinkiewicz

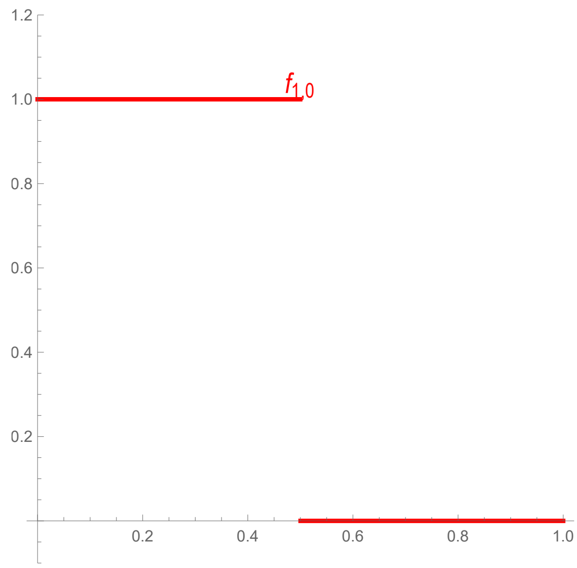

Figura 4.4: $f_{1,0}$ de Marcinkiewicz

Otro resultado que encontramos que reafirma que los espacios de dimensión infinita son más complicados de tratar que los de dimensión finita es el **teorema de Dvoretzky-Rogers** demostrado en 1950. Este teorema nos dice que aunque una serie converja para cualquier reordenamiento de sus términos, lo que se denomina ser incondicionalmente convergente, podría

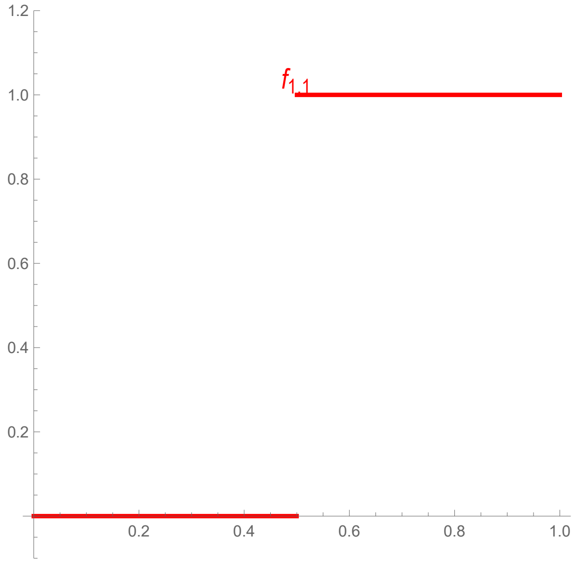

Figura 4.5: $f_{0,1}$ de Marcinkiewicz

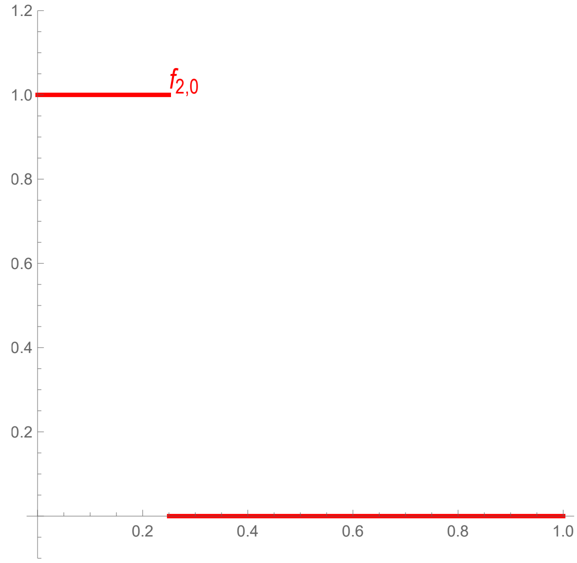

Figura 4.6: $f_{2,0}$ de Marcinkiewicz

darse el caso de que esta no fuese absolutamente convergente, cosa que no ocurría en espacios de dimensión finita como ya probamos. Podéis encontrar una demostración del teorema en la referencia [4].

Teorema 4.4.1 (Teorema de Dvoretzky-Rogers) *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces, existe en X una serie incondicionalemente convergente que no es absolutamente convergente.*

Parece que tras estos resultados, no podremos encontrar algo parecido al teorema de Riemann o al teorema de Lévy-Steinitz en espacios de dimensión infinita. Pero, en 1973 D.V. Pechersky nos da una posible solución a nuestro problema.

Teorema 4.4.2 (Teorema de Pechersky) *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert real y $(u_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de vectores tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 < \infty,$$

y que para todo vector unitario $e \in \mathcal{H}$, la serie $\sum_{n\geq 1} \langle u_n, e\rangle$ converge condicionalmente. Entonces, para todo $v \in \mathcal{H}$ existe una permutación σ de $\mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{\sigma(n)} = v.$$

Para probar este resultado necesitamos varias consideraciones previas. Del teorema de la norma mínima, deducimos un teorema de separación (teorema tipo Hahn-Banach). Después deducimos que, bajo las condiciones del teorema de Pechersky, todo vector se obtiene como límite de una subsucesión de sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} u_{\sigma(n)}$, donde σ es un reordenamiento de $\mathbb{N}$. Por último, previo a la demostración del teorema de Pechersky, veremos una estimación de la norma de reordenamientos.

Teorema 4.4.3 (Elemento de norma mínima) *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $E \subset \mathcal{H}$ un conjunto convexo, cerrado y no vacío. Entonces para todo vector $f \in \mathcal{H}$ existe $x_0 \in E$ único tal que*

$$\|f - x_0\| = \text{mín}\{\|f - x\| : x \in E\}. \tag{4.3}$$

Este elemento se caracteriza por las condiciones

$$\begin{cases} x_0 \in E, \\ \Re(\langle f - x_0, x - x_0\rangle) \leq 0, \quad \forall x \in E. \end{cases} \tag{4.4}$$

Demostración:
Sea $M = E - f$. Este conjunto es cerrado, no vacío y convexo. Probar (4.3) equivale a probar que M tiene un elemento de norma mínima.

Sea $\delta = \text{ínf}\{\|x\| : x \in M\}$. Según la identidad del paralelogramo, dados $x, y \in M$ y como $\frac{x+y}{2} \in M$, se tiene

$$\frac{1}{4}\|x - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \|\frac{x+y}{2}\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \delta^2$$

$$\Rightarrow \|x - y\|^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\delta^2.$$

Por definición de ínfimo y como $E \neq \emptyset$, existe $\{y_n\}_{n\geq 1} \subset M$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n\| = \delta.$$

Según la desigualdad probada, para todo $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\Rightarrow \|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4\delta^2.$$

haciendo n, m tender a infinito obtenemos que $\|y_n - y_m\|$ se hace pequeña, de modo que $\{y_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}$. De donde $\{y_n\}_{n\geq 1}$ es convergente. Si $x_0 = \lim y_n$, entonces como E es cerrado, $x_0 \in E$,

$$\|x_0\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = \delta.$$

A continuación probamos la unicidad. Si $x_0, x_1 \in M$ tienen norma mínima, entonces para todo $\alpha \in [0, 1]$, por la desigualdad triangular,

$$\|\alpha x_0 + (1 - \alpha)x_1\| \leq \alpha\|x_0\| + (1 - \alpha)\|x_1\| = \|x_0\| = \|x_1\|.$$

Como $\alpha x_0 + (1 - \alpha)x_1 \in M$, se tiene igualdad en las relación anterior. De donde, existe $\lambda > 0$ tal que $\alpha x_0 = \lambda(1 - \alpha)x_1$, o sea, los vectores x_0 y x_1 son proporcionales. Como tienen iguales normas, eso ocurre sólo si $x_0 = x_1$.

Probemos ahora la equivalencia de (4.3) y (4.4). Sea $x_0 \in \mathcal{H}$ que cumple (4.3). Entonces para todo $x \in E$ y $\alpha \in [0,1]$ se cumple

$$\|f - x_0\| \leq \|f - (\alpha x + (1-\alpha)x_0)\| = \|f - x_0 - \alpha(x - x_0)\|.$$

Lo que implica que,

$$\begin{aligned}\|f - x_0\|^2 &\leq \|f - x_0 - \alpha(x - x_0)\|^2 \\ &= \|f - x_0\|^2 - 2\alpha\Re(\langle f - x_0, x - x_0\rangle) + \alpha^2\|x - x_0\|^2\end{aligned}$$

De donde sigue inmediatamente (4.4).

Inversamente, si se cumple (4.4), entonces para todo $x \in E$ se tiene

$$\begin{aligned}\|f - x_0\|^2 - \|f - x\|^2 &= \|f - x_0\|^2 - \|f - x_0 + x_0 - x\|^2 \\ &= 2\Re((\langle f - x_0, x - x_0\rangle)) - \|x_0 - x\|^2 \leq 0.\end{aligned}$$

□

Corolario 1 *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert real, un subconjunto $E \subset \mathcal{H}$ no vacío, convexo y cerrado y $f \in \mathcal{H} \setminus M$. Existe un vector unitario $g \in \mathcal{H}$ tal que para todo $x \in E$ se cumple*

$$\langle g, x\rangle \leq \langle g, f\rangle.$$

De donde,

$$\sup_{x \in M} \langle g, x\rangle \leq \langle g, f\rangle.$$

Demostración:
Sea $x_0 \in E$ como en el teorema 4.4.3 . Definimos $g := \frac{f - x_0}{\|f - x_0\|}$. Entonces g es unitario y

$$\langle g, x - x_0\rangle \leq 0 \Leftrightarrow \langle g, x\rangle \leq \langle g, x_0\rangle = \langle g, f\rangle + \langle g, x_0 - f\rangle \leq \langle g, f\rangle.$$

□

Lema 4.4.4 *Bajo las hipótesis del teorema de Pechersky tenemos que para todo $v \in \mathcal{H}$ y para todo $\epsilon > 0$ existe un entero positivo N y números $\alpha_j \in \{0,1\}$, $j = 1, 2 \ldots, N$, tales que*

$$\left\| v - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n u_n \right\| < \epsilon. \tag{4.5}$$

Demostración:
Primero probamos (4.5) cuando los coeficientes de la combinación lineal son números en $[0,1]$ y después, por inducción, aproximamos estas sumas por las combinaciones buscadas.

Por hipótesis, existe m tal que

$$\sum_{n=m}^{\infty} \|u_n\|^2 < \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Sea C_m las combinaciones lineales $\sum_{n=m}^N \lambda_n u_n$, con $\lambda_j \in [0,1]$, $j = m, \ldots, N$, $N \geq m$. Es obvio que C_m es convexo y no vacío. Su clausura topológica en $\mathcal{H}$, $\overline{C_m}$, es densa en $\mathcal{H}$ porque, en caso contrario, se obtendría una contradicción: por una parte, según el Corolario 1,

$$\sup_{x \in \overline{C_m}} \langle e, x \rangle < \infty$$

para todo $e \in \mathcal{H}$ unitario y por otra, la no convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=m}^\infty \langle e, u_n \rangle$ lleva a la divergencia de la correspondiente serie de los términos positivos, que implica

$$\sup_{x \in \overline{C_m}} \langle e, x \rangle = \infty.$$

Por tanto, existen $N > m$ y $\lambda_m, \ldots, \lambda_N \in [0,1]$ tales que

$$\|v - \sum_{n=m}^N \lambda_n u_n\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ahora construimos los $\alpha_j \in \{0,1\}$ buscados por inducción, de modo que satisfagan la desigualdad siguiente

$$\left\| \sum_{n=m}^N \lambda_n u_n - \sum_{n=m}^N \alpha_n u_n \right\|^2 \leq \sum_{n=m}^N \|u_n\|^2. \tag{4.6}$$

En la elección α_m no hay restricción excepto que esté en $\{0,1\}$. Elegidos α_j, $j = m, \ldots, M < N$, $\alpha_{M+1} \in \{0,1\}$ lo seleccionamos tal que

$$(\lambda_{M+1} - \alpha_{M+1}) \langle \sum_{n=m}^M (\lambda_n - \alpha_n) u_n, u_{M+1} \rangle \leq 0.$$

Así llegamos a la relación

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=m}^{M+1} \lambda_n u_n - \sum_{n=m}^{M+1} \alpha_n u_n \right\|^2 &\leq \left\| \sum_{n=m}^{M} \lambda_n u_n - \sum_{n=m}^{M} \alpha_n u_n \right\|^2 + \|u_{M+1}\|^2 \\ &+ 2(\lambda_{M+1} - \alpha_{M+1}) \langle \sum_{n=m}^M (\lambda_n - \alpha_n) u_n, u_{M+1} \rangle \leq \sum_{n=m}^{M+1} \|u_n\|^2. \end{aligned}$$

Con esta selección de α_j, y haciendo iguales a cero los α_j con índice menores que m, nos queda

$$\|v - \sum_{n=1}^N \alpha_n u_n\| \leq \|v - \sum_{n=1}^N \lambda_n u_n\| + \| \sum_{n=m}^N \lambda_n u_n - \sum_{n=m}^N \alpha_n u_n\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \left(\sum_{n=m}^\infty \|u_n\|^2 \right)^{1/2} < \epsilon.$$

□

Lema 4.4.5 *Bajo las hipótesis del teorema de Pechersky, tenemos que existe una permutación n_k de los naturales tal que alguna subsucesión de las sumas parciales de $\sum_k u_{n_k}$ converge a v.*

Demostración:
Para $\epsilon = \frac{1}{2}$, aplicamos el Lema 4.4.4 a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. De esta forma obtenemos un conjunto finito $T_1 \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\|v - \sum_{n \in T_1} u_n\| < \frac{1}{2}.$$

Si $u_1 \notin T_1$, entonces lo podemos incluir en T_1 aplicando el Lema 4.4.4 al vector $v - u_1$ y a la serie a partir de $n \geq 2$.

Sea $N_1 = \text{máx}\{n \in \mathbb{N} : n \in T_1\}$. Para $\epsilon = \frac{1}{2^2}$ y el vector $v - \sum_{n \in T_1} u_n$ aplicamos el Lema 4.4.4 a la serie $\sum_{n=N_1+1}^{\infty} u_n$. Entonces existe un conjunto finito $T_2 \subset \{N_1, \ldots\}$ tal que

$$\|v - \sum_{n \in T_1} u_n - \sum_{n \in T_2} u_n\| < \frac{1}{2^2}.$$

Si n_2 no pertenece a T_2 lo podemos incluir por análogos argumento a los anteriores. Repitiendo el proceso inductivamente, obtenemos el reodenamiento de los naturales buscado.

□

Lema 4.4.6 *Sean $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{H}$ vectores en un espacio de Hilbert real. Entonces existe una permutación σ del conjunto $\{1, \ldots, N\}$ de modo que*

$$\max_{1 \leq m \leq N} \left\| \sum_{n=1}^{m} u_{\sigma(n)} \right\| \leq \left(\sum_{n=1}^{N} \|u_n\|^2 \right)^{1/2} + 2 \left\| \sum_{n=1}^{N} u_n \right\|.$$

Demostración:
Consideramos primero el caso en el que $\sum_{n=1}^{N} u_n = 0$. En este caso construimos la permutación σ que demuestra el lema mediante inducción. Para ello tomamos $n_1 = 1$ y supongamos que $n_1, \ldots, n_j$ con $1 \leq j < N$ han sido escogidos de la siguiente manera

$$\max_{1 \leq m \leq j} \left\| \sum_{k=1}^{m} u_{n_k} \right\|^2 \leq \sum_{k=1}^{j} \|u_{n_k}\|^2. \tag{4.7}$$

De entre los vectores que faltan, elegimos el siguiente verificando

$$\left\langle \sum_{k=1}^{j} u_{n_k}, u_{n_{j+1}} \right\rangle \leq 0.$$

Notemos que debe existir al menos un vector que satisfaga esa condición, de lo contrario tendríamos:

$$0 < \sum_{u_n \neq u_{n_k}} \left\langle \sum_{k=1}^{j} u_{n_k}, u_n \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{j} u_{n_k}, \sum_{u_n \neq u_{n_k}} u_n \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{j} u_{n_k}, -\sum_{k=1}^{j} u_{n_k} \right\rangle$$

lo cual es imposible. Veamos ahora como la desigualdad (4.7) sigue verificándose para los vectores $u_{n_1}, \dots, u_{n_j}$. Notemos que si el máximo se alcanzase para algún $m < j+1$, ya tendríamos la cota que buscamos. Por ello, supongamos que el máximo se alcanza para $m = j+1$, en tal caso

$$\left\| \sum_{k+1}^{j+1} u_{n_k} \right\|^2 = \left\| \sum_{k+1}^{j} u_{n_k} \right\|^2 + \|u_{n_{j+1}}\|^2 + 2\left\langle \sum_{k=1}^{j} u_{n_k}, u_{n_{j+1}} \right\rangle \leq \sum_{k=1}^{j+1} \|u_{n_k}\|^2.$$

Por lo que queda probado el caso cuando $\sum_{n=1}^{N} u_n = 0$. Para el caso general, definimos $u_{N+1} = -\sum_{n=1}^{N} u_n$ y apelamos al caso anterior, obteniendo que

$$\max_{1\leq m\leq N+1} \left\| \sum_{k=1}^{m} u_{n_k} \right\|^2 \leq \sum_{k=1}^{N+1} \|u_{n_k}\|^2,$$

donde despejando adecuadamente los sumandos de u_{N+1} concluimos la prueba del lema. $\square$

Con todos estos elementos ya somos capaces de demostrar el teorema de Pechersky.

Demostración:

Por el lema 4.4.5 obtenemos que existe una subsucesión de las sumas parciales de $\sum_k u_k$ que converge a v. Definamos

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} u_n$$

y denotemos por S_{N_j} la subsucesión de S_N que converge a v. Para cada $j \in \mathbb{N}$ hay una permutación σ de los vectores $\{u_{N_j+1}, \dots, u_{N_{j+1}}\}$ de modo que el máximo

$$m_j := \max_{N_j+1\leq m\leq N_{j+1}} \left\| \sum_{k=N_j+1}^{m} u_{\sigma(k)} \right\|$$

se minimiza. En virtud del lema 4.4.6 tenemos que se cumple que

$$m_j \leq \left(\sum_{n=N_j+1}^{N_{j+1}} \|u_n\|^2 \right)^{1/2} + 2\|S_{N_{j+1}} - S_{N_j}\|,$$

que tiende a 0 cuando $j \to \infty$. Puede verse que el reordenamiento obtenido tiende a v. Sea $N \in \mathbb{N}$ arbitrario y N_j el inmediatamente inferior a N, acotando, obtenemos

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} u_{\sigma(n)} - v \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{N_j} u_{\sigma(n)} - v \right\|.$$

Como la parte derecha converge a 0 cuando N tiende a ∞, la prueba del teorema de Pechersky se concluye.

$\square$

Capítulo 5

Teorema de reordenamiento integral

Una vez estudiado diferentes casos en los que trabajamos de series, la primera idea que se nos viene a la cabeza es: ¿sucederá algo parecido pero si en vez de considerar series consideramos integrales? Esto es lo que vamos a estudiar en esta sección, algunos resultados sobre integración, además de estudiar con más detalle la integrabilidad impropia y su relación con los teoremas antes estudiados.

Este capítulo lo dividiremos en varias secciones, primero definiremos que significa ser impropiamente integrable y definiremos el espacio $L^1_G(X)$. Después veremos ciertas propiedades de dicho espacio para terminar con un resultado similar al teorema de reordenamiento de Riemann pero para integrales.

5.1. El espacio $L^1_G(X)$

A diferencia de la integral de Riemann, la teoría general de la integración no establece hipótesis iniciales sobre la acotación de la función ni sobre el dominio de integración. No obstante, una función tal como $\frac{\sin x}{x}$ es impropiamente integrable sobre $\mathbb{R}$ según Riemann y su integral vale π, pero por el contrario la integral $\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ diverge en $\mathbb{R}$ y, por tanto, la función $\frac{\sin x}{x}$ no pertenece a $L^1(\mathbb{R})$. Veamos ahora las dos afirmaciones realizadas.

- $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi$.

  Notemos que la función $\frac{\sin x}{x}$ es una función par y, por tanto,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\, dx = 2\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

  Consideremos ahora la integral paramétrica,

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x}\, dx \ ,\ \alpha > 0$$

  Por tanto,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} F(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x}\, dx\right).$$

Tomamos $f(x,\alpha) = \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x}$ con $(x,\alpha) \in (0,+\infty) \times (0,+\infty)$. Para aplicar el teorema de derivación bajo signo integral se deben de cumplir las siguientes hipótesis.

- Para todo $x \in (0,+\infty)$, $f(x,\cdot)$ es derivable. Como vemos, lo verifica.
- Para todo $\alpha \in (0,+\infty)$, $f(\cdot,\alpha)$ es medible y existe $d \in (0,+\infty)$ tal que $f(\cdot,d) \in L((0,+\infty))$.
  Como vemos, la función $f(x,\alpha)$ es medible por ser una función continua y si tomamos $d = 1$ tenemos que:
  $$\int_0^{+\infty} |f(x,1)|\, dx = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{|\sin x|}{x}}_{\leq 1} e^{-x}\, dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx < +\infty$$
- Para cada $c \in (0,+\infty)$, existe J entorno abierto de c en $(0,+\infty)$ y $g_c : (0,+\infty) \to [0,+\infty]$ medible tal que $\int_{(0,+\infty)} g_c < +\infty$ de modo que
  $$\left| \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} \right| \leq g_c(x),$$
  para todo $x \in (0,+\infty)$ y para todo $\alpha \in J$.
  En nuestro caso, $\left| \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} \right| = e^{-\alpha x} |\sin x|$.
  Por lo tanto, para $c \in (0,+\infty)$ fijo, elegimos $\delta > 0$ tal que $c - \delta > 0$ y definimos $J = (c-\delta, +\infty)$ y ocurre que,
  $$\left| \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} \right| = e^{\alpha x} |\sin x| \leq \underbrace{e^{-(c-\delta)x}}_{g_c(x)}.$$
  Que como vemos es una función válida para $x \in (0,+\infty)$ y $\alpha \in J$ ya que es integrable en $(0,+\infty)$ por ser $c - \delta > 0$.

Luego, F es derivable y además,

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} F(x,\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x}\, dx \right) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} \right) dx = \int_0^{\infty} -e^{-\alpha x} \sin x\, dx. \end{aligned}$$

Ahora integrando dos veces por partes obtenemos que

$$F'(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2 + 1}.$$

Luego, integrando, resulta

$$F(\alpha) = \int -\frac{d\alpha}{\alpha^2+1} + C = -\arctan(\alpha) + C.$$

Para calcular C, es fácil probar utilizando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue que

$$\lim_{\alpha \to \infty} F(\alpha) = 0 \text{ y } \lim_{\alpha \to \infty} -\arctan \alpha + C = -\frac{\pi}{2} + C.$$

Luego, $C = \frac{\pi}{2}$ con lo que, $F(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arctan\alpha$, $\alpha > 0$.

Tomando límite cuando $\alpha \to 0^+$ resulta,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{\alpha\to 0^+} F(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0^+} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan(\alpha)\right] = \frac{\pi}{2},$$

donde en la primera igualdad es cierta por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue. Finalmente

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\, dx = 2\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi.$$

- $\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\, dx > \infty$.

  Al igual que antes, aplicamos la paridad de la función y calcularemos la integral en $[0,\infty)$. Para ello veamos la siguiente desigualdad que justifica la divergencia de la integral propuesta.

$$\begin{aligned}\int_0^{(N+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx &= \sum_{n=0}^{N} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \\ &> \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

  Por tanto, tomando límites a ambos lados y sabiendo que la serie armónica diverge, obtenemos que,

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\, dx \ \text{ diverge.}$$

Así, vemos la necesidad de introducir el concepto de función impropiamente integrable en el sentido Lebesgue.

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida positiva σ-finita y consideremos las clases:

$$\Sigma_\mu = \{A \in \Sigma \,|\, \mu(A) < \infty\}.$$

$$H = \{(A_n \uparrow) \subset \Sigma_\mu \,|\, \mu(X \setminus \bigcup_n A_n) = 0\}.$$

Si $f \in L^1(X)$ y $(A_n) \in H$, obtenemos que

$$\int_{A_n} f\, d\mu \xrightarrow[n]{} \int_X f\, d\mu.$$

Sin embargo, podría ocurrir que la sucesión $\left(\int_{A_n} f\, d\mu\right)$ fuese convergente, sin la hipótesis $f \in L^1(X)$.

Definición 9 *Sea $G \in H$ y la función medible $f : X \to \mathbb{C}$, diremos que es impropiamente integrable según G, o que existe la integral impropia de f según G si para toda sucesión $(A_n) \in G$ y todo $n \in \mathbb{N}$, $f|A_n \in L^1(X \setminus A_n)$ y si existe un número complejo, el cual denotaremos $\int^G f\, d\mu$, tal que*

$$\lim_n \int_{A_n} f\, d\mu = \int^G f\, d\mu.$$

Esta última expresión lleva implícita la existencia del límite para cualquier sucesión en G. Denotaremos $L^1_G(X)$ al conjunto de las funciones impropiamente integrables según G.

Teorema 5.1.1 (Propiedades de $L^1_G(X)$) *A continuación veremos algunos resultados sobre el espacio $L^1_G(X)$.*

1. *$L^1_G(X)$ es un espacio vectorial y la aplicación $f \to \int^G f\, d\mu$, es una función lineal.*
2. *$L^1(X) \subset L^1_G$ y para toda función $f \in L^1(X)$*

$$\int_X f\, d\mu = \int^G f\, d\mu.$$

3. *Si $f \in L^1_G(X) \setminus L^1(X)$, entonces al menos una de las funciones $Re(f)^+$ o $Im(f)^+$ no pertenece a $L^1(X)$. Además, con la condición anterior $Re(f)^+ \in L^1(X)$ si y sólo sí $Re(f)^- \in L^1(X)$ (también tenemos el resultado análogo con $Im(f)$).*

Demostración:

1. Trivial considerando la linealidad del límite y la integral.
2. Trivial aplicando el teorema de convergencia monótona.
3. Supongamos que f es real. Si $f^+ \in L^1(X)$ y $f^- \notin L^1(X)$, entonces, para toda sucesión $(A_n) \in G$, se tendrá que.

$$\int_{A_n} f\, d\mu = \int_{A_n} f^+\, d\mu - \int_{A_n} f^-\, d\mu \underset{n}{\to} -\infty$$

   Por tanto, $f \notin L^1_G(X)$. El papel de f^+ y f^-, se intercambia considerando $-f$, pues $L^1_G(X)$ y $L^1(X)$ son espacios vectoriales. El resto de la demostración para el caso complejo, sigue de la linealidad de las integrales y del límite.

□

5.2. Teorema de reordenamiento integral

A lo largo de este Trabajo de Fin de Grado hemos visto varios resultados sobre reordenamiento de series, que si nos abstraemos, podemos ver esas series como las integrales dentro del espacio de medida discreto. Lo que nos hace pensar en buscar resultados análogos en términos de integración impropia. Para ello necesitaremos probar primero un lema necesario en nuestra demostración.

Lema 5.2.1 *Sea $X \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto de Borel, $g \in L^1(X)$, g real y definamos para $r \geq 0$*

$$F(r) := \int_{\overline{B}(0,r)\cap X} g(x)\, dx.$$

Entonces F es una función continua y $F([0,\infty))$ es un intervalo que contiene al 0.

Demostración:
Sea $X_r := \overline{B}(0,r) \cap X$. La función $r \to m_d(X_r)$ es continua en $\mathbb{R}_+$ ya que si consideramos $R \geq r \geq 0$, $m_d(X_R) - m_d(X_r) \leq m_d(\overline{B}(0,R)\backslash\overline{B}(0,r)) = \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2+1)}(R^m - r^m) \xrightarrow{r\to R} 0$ (donde Γ es la función gamma de Euler).

Como $|F(R)-F(r)| \leq \int_{X_R\backslash X_r} |g(x)|\, dx$, se tiene que F es continua. Como $\mathbb{R}_+$ es un intervalo, la imagen de F también es un intervalo. Además, $F(0) = 0$. $\square$

Ahora ya estamos en condiciones de demostrar el siguiente teorema, de donde como corolario obtendremos el teorema de reordenamiento integral.

Teorema 5.2.2 *Sea, $X \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto de Borel y una función real Borel-medible $f : X \to \mathbb{R}$, tal que f^+, $f^- \notin L^1(X)$ entonces, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, existe una sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in H$ tal que,*

$$\lim_n \int_{B_n} f(x)\, dx = \alpha.$$

Análogamente, existen sucesiones $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in H$ tales que $\lim_n \int_{C_n} f(x)\, dx$ es oscilante, divergente a $+\infty$ o a $-\infty$ según se desee.

Demostración:
Sea $X^+ := \{x \in X : f(x) > 0\}$, $X^- := X\backslash X^+$ y sean $\{X_n\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ y los conjuntos X_n son disjuntos dos a dos tal que $X = \bigcup_n X_n$, $m_d(X_n) < \infty$ con $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos ahora las siguientes conjuntos,

$$D_n^+ := \{f^+ \leq n\} \cap X^+ \quad \text{y} \quad D_n^- := \{f^- \leq n\} \cap X^-.$$
$$E_n^+ := \bigcup_{0\leq j,k\leq n} (D_j^+ \cap X_k) \quad \text{y} \quad E_n^- := \bigcup_{0\leq j,k\leq n} (D_j^- \cap X_k).$$

Por construcción, tenemos que E_n^+, $E_n^- \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $E_n^+ \uparrow X^+$, $E_-^+ \uparrow X^-$, $f^+/E_n^+ \in L^1(E_n^+)$, $f^-/E_n^- \in L^1(E_n^-)$ y $\int_{E_n^+} f^+(x)\, dx \xrightarrow{n} +\infty$, $\int_{E_n^-} f^+(-)\, dx \xrightarrow{n} +\infty$.

Sea $a \in \mathbb{R}$, si $a > 0$, comenzamos con f^+, si $a \leq 0$, con f^-. Sea, por ejemplo, $a > 0$, tomemos n_0, el primer número natural para el cual $\int_{E^+_{n_0}} f^+ > a$. Notemos que $\int_{E^+_{n_0}} f^+ = \lim_{r\to\infty} \int_{\overline{B}(0,r)\cap E^+_{n_0}} f^+$ y además $\lim_{r\to 0} \int_{\overline{B}(0,r)\cap E^+_{n_0}} f^+ = 0$, por tanto, por el lema precedente, existe $r_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\int_{\overline{B}(0,r)\cap E^+_{n_0}} f^+ = a$.
Denotamos entonces $B_0 = \overline{B}(0, r_0) \cap E^+_{n_0}$.
Una vez construidos $B_0, \ldots, B_{n_{k-1}}$, sea p_k el primer número natural tal que tal que $\int_{E^-_{p_k}} f^- > \int_{E^+_{n_{k-1}}} f^+$ y sea n_k el primer número natural, tal que $\int_{E^+_{n_k}} f^+ > a + \int_{E^-_{p_k}} f^-$. Notemos que esto se puede asegurar debido a que f^+ y $f^- \notin L^1(X)$, por tanto, podemos encontrar siempre dichos valores.
Notemos ahora que,

$$\int_{E^+_{n_k}\setminus E^+_{n_{k-1}}} f^+ \;+\; \int_{E^+_{n_{k-1}}} f^+ \;-\; \int_{E^-_{n_k}} f^- > a.$$

Por el Lema anterior existirá $r_k \in \mathbb{R}_+$, de manera que

$$\int_{\overline{B}(0,r_k)\cap(E^+_{n_k}\setminus E^+_{n_{k-1}})} f^+ \;+\; \int_{E^+_{n_{k-1}}} f^+ \;-\; \int_{E^-_{n_k}} f^- = a.$$

Y definimos el conjunto $B_{n_k} := [\overline{B}(0, r_k)\cap(E^+_{n_k}\setminus E^+_{n_{k-1}})]\cup E^+_{n_{k-1}}\cup E^-_{n_k}$. Por construcción tenemos que $B_n \uparrow X$ y $\int_{B_{n_k}} f(x)\, dx = a$ □

Corolario 2 (Reordenamiento integral) *Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto de Borel y una función real $f \in L^1_G(X)$ para alguna clase $G \subset H$. Si $f \notin L^1(X)$ entonces, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, existe una sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in H$ tal que,*

$$\lim_n \int_{B_n} f(x)\, dx = \alpha.$$

Análogamente, existen sucesiones $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in H$ tales que $\lim_n \int_{C_n} f(x)\, dx$ es oscilante, divergente a $+\infty$ ó a $-\infty$ según se desee.

Demostración:
Como $f \in L^1_G(X)\setminus L^1(X)$, entonces según el apartado 3 del teorema 5.1.1 tenemos que f^+ y f^- no son integrables. Aplicando ahora el teorema anterior, tenemos el resultado deseado. □

Capítulo 6

Breve comentario sobre la bibliografía

En este capítulo repasaré brevemente algunas aclaraciones que creo convenientes realizar sobre la bibliografía utilizada.

En la sección 2.1 me he basado en la exposición cronológica que hace Remmert en [13]. Aquí podemos encontrar una presentación histórica sobre el concepto de convergencia absoluta de series y del teorema de reordenamiento de Riemann que después demostramos en la sección 2.2.

En el capítulo 3, que nos habla sobre la función G_2 de Eisenstein, hemos utilizado el libro de Apostol [2] y artículo de Romik y Scherer [14] además de añadir ciertas aclaraciones para que fuese más fácil de entender.

Otro capítulo que ha utilizado bastante bibliografía ha sido el capítulo 4. Por una parte, toda la información necesaria para el estudio de los resultados en $\mathbb{R}^n$ se ha extraído del artículo [15] escrito por Rosenthal. Pero, para encontrar información sobre los resultados en espacios de Banach he acudido al capítulo 1 del trabajo de fin de máster [12] de Monsalve.

En el capítulo 5, se ha seguido la exposición que aparece en la sección 2.5 del libro [7] escrito por Jiménez.

Capítulo 7

Conclusiones

El desarrollo de este Trabajo Fin de Grado ha sido un viaje apasionante por un mundo que desconocía, el del reordenamiento de las series. Además me ha permitido utilizar muchas herramientas de la carrera y ver como en una labor de investigación es bueno ver las cosas desde distintos enfoques para conseguir nuestros objetivos.

Lo aprendido con este trabajo se podría encapsular en dos grandes grupos, el primero sería el grupo de los conocimientos técnicos y teóricos mientras que el otro sería el de las competencias de la investigación. En cuanto a lo aprendido de forma teórica, he podido disfrutar con muchos de los resultados aquí expuestos. Por ejemplo, me ha encantado la elegancia y lo simple que es la demostración del teorema de Riemann para demostrar un teorema que a priori parece que no puede ser verdad. Otro resultado con el que he disfrutado mucho ha sido con el de Lévy-Steinitz y cada uno de sus lemas técnicos, que hacen uso de unas ideas sorprendentes dando lugar a demostraciones muy bonitas a mi parecer. Además, creo que podemos encontrar aplicaciones muy interesantes todavía en estos temas como reordenamientos de series de Fourier y saber controlar esas reordenamientos a nuestro favor.

Pero a pesar de toda la teoría que he aprendido por mi cuenta de manera autodidacta, creo que en este caso lo que me llevo de este trabajo es mucho más que el puro conocimiento matemático, os hablo de las competencias de investigador. Estas son tales como la constancia, el saber hacer y elegir buenas referencias que le aporten algo a lo que estás escribiendo. Leer un artículo siempre con mirada crítica, y entender lo que nos quiere decir, pero tampoco dar las cosas por hecho. En muchas ocasiones las cosas no salen tan fácil como creías a la primera, por lo que es muy importante ser constante.

Por último, me gustaría decir que me ha gustado mucho realizar este trabajo y creo que he conseguido aprender mucho de mi tutor durante todas las reuniones realizadas. Y decir que hacer este trabajo ha conseguido avivar el fuego que me llamaba a realizar investigación.

Bibliografía

[1] Apostol, T. M. *Calculus, Volume I, One-variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*, vol. 1. John Wiley & Sons, 2007, ch. 10.

[2] Apostol, T. M. *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, vol. 41. Springer Science & Business Media, 2012.

[3] Cowen, C. C., Davidson, K., and Kaufman, R. Rearranging the alternating harmonic series. *Am. Math. Monthly 87*, 10 (1980), 817–819.

[4] Dvoretzky, A., and Rogers, C. A. Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 36*, 3 (1950), 192.

[5] Fuchs, B. A., and Shabat, B. V. *Functions of a complex variable and some of their applications*. Elsevier, 2014.

[6] Gross, W. Bedingt konvergente reihen. *Monatsh. Math. Phys. 28*, 1 (1917), 221–237.

[7] Jiménez, M. A. *Medida, Integración y funcionales*. Pueblo y Educación, 1989.

[8] Katznelson, Y., McGehee, O. C., et al. Conditionally convergent series in $\mathbb{R}^\infty$. *Michigan Math. J. 21*, 2 (1974), 97–106.

[9] Knopp, K. *Infinite sequences and series*. Courier Corporation, 1956.

[10] Lévy, P. Sur les séries semi-convergentes. *Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale 5* (1905), 506–511.

[11] Mauldin, R. D. *The Scottish book: mathematics from the Scottish Café*. Birkhauser, 1981.

[12] Monsalve, M. La universalidad de la función zeta de Riemann. *Gaceta RSME 20*, 1 (2017), 143–157.

[13] Remmert, R. *Theory of complex functions*, vol. 122. Springer Science & Business Media, 2012.

[14] Romik, D., and Scherer, R. Alternative summation orders for the eisenstein series g2 and weierstrass p-function. *arXiv preprint arXiv:1811.01523* (2018).

[15] Rosenthal, P. The remarkable theorem of lévy and steinitz. *Am. Math. Monthly 94*, 4 (1987), 342–351.

[16] Scheepers, M. On the pringsheim rearrangement theorems. *J. Maths. Anal. Appl. 267*, 2 (2002), 418–433.

[17] Steinitz, E. Bedingt konvergente reihen und konvexe systeme. *J. Reine. Angew. Math. 143* (1913), 128–176.